## Note 153 : Questionnaire de travail : les différentielles

ARTIGUE M., MENIGAUX J.& VIENNOT L. (1988) *Questionnaires de travail, Les différentielles*, IREM-LDPES, Université Paris 7, p 70.

Le document est joint ci-après.

UNIVERSITE PARIS 7

# QUESTIONNAIRES DE TRAVAIL
# SUR
# LES DIFFERENTIELLES

M. ARTIGUE, J. MENIGAUX, L. VIENNOT

PUBLIC:
**Enseignants de mathématiques et de physique de l'enseignement supérieur**

**ANNEXE:** mise au point théorique rédigée par
**D. ALIBERT et M. ARTIGUE**

DIFFUSE PAR L'I.R.E.M. ET LE L.D.P.E.S.

Ce fascicule est issu d'une recherche pluridisciplinaire en didactique, menee dans le cadre du G.R.E.C.O. DIDACTIQUE ET ACQUISITION DES CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES, et à laquelle ont participé également:

| | |
|---|---|
| M.Hallez | (I.R.E.M., Paris 7) |
| J.M.Courdille | (L.D.P.E.S.,Paris 7) |
| D.Grenier | |
| M.Legrand | |
| F.Richard | (Equipe de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble I) |

# QUESTIONNAIRES DE TRAVAIL SUR LES DIFFERENTIELLES

Les questionnaires qui suivent ont été construits pour faire apparaître clairement certaines difficultés ou simplement certains aspects des différentielles peu mis en lumière par les exercices les plus habituellement proposés.

Les questionnaires prennent selon les cas la forme d'une question d'apparence plutôt mathématique, ou plutôt physique. Or précisément l'un des aspects des différentielles visés ici est d'être un objet à usage interdisciplinaire. La plupart de ces questions peuvent donc se révéler profitables dans le cadre d'une discipline comme de l'autre, et a fortiori dans un enseignement explicitement interdisciplinaire.

Les questions sont regroupées en fonction des aspects sur lesquels elles attirent principalement l'attention.

Pour chaque rubrique, le lecteur trouvera une courte introduction suivie de questionnaires accompagnés le plus souvent d'un "corrigé" et des réponses d'étudiants les plus fréquemment observées.

Pour ne pas alourdir exagérément introductions et corrigés, on donne en annexe un bref récapitulatif sur définition, propriétés et usages des différentielles.

Les différentes rubriques, qui, bien sûr, s'imbriquent mutuellement, sont les suivantes:

- I Les différentielles, pour quoi faire ?
- II Différentielles et calculs d'incertitude
- III Exactitude des calculs, rigueur des démonstrations
- IV Aspect fonctionnel des différentielles

Que le lecteur ne soit pas surpris de trouver, proposés à l'analyse des étudiants, des textes formulés de façon incorrecte, imprécise ou abrégée: ces textes sont issus du matériel **usuel** de l'enseignement. Il nous a paru important de soumettre précisément **ce type de texte** à une analyse rigoureuse.

# I Les différentielles, pour quoi faire?

L'annexe de ce fascicule aborde relativement en détail cette question. Rappelons ici l'essentiel.

Les deux registres essentiels d'utilisation des différentielles sont :

a) le calcul approché

b) la mise en équation de problème par procédures intégrales et différentielles.

Pour ces deux registres, il s'agit de pallier une non linéarité des phénomènes étudiés.

* Le registre du calcul approché comprend l'estimation de l'accroissement d'une fonction au voisinage d'une valeur connue, plus largement l'étude locale de courbes et de surfaces.

* Le second registre, celui de la mise en équation de problèmes concernant des phénomènes non linéaires mène, lui, à des résultats de type global : calcul de grandeurs par procédure d'intégration, mise à jour de dépendances fonctionnelles valables sur le domaine.

En revanche les critères de légitimité des procédures peuvent, eux, être soit de type global (voir en annexe "le point de vue intégral") soit de type local, variationnel (voir en annexe "le point de vue différentiel").

Deux questionnaires q1 et q1', l'un proposé dans le cadre d'un enseignement de 1er cycle universitaire de physique, l'autre à des étudiants de licence de mathématiques, explorent la question de l'utilité des différentielles de manière très large, et sous forme déclarative. Les suivants mettent les étudiants en situation de réagir sur des cas spécifiques.

**QUESTIONNAIRE Q1**

Vous avez fait de la physique jusqu'au baccalauréat sans différentielles. Elles vous ont été introduites au premier semestre de votre première année universitaire. Pouvez-vous caractériser les situations où elles sont nécessaires ? Donnez, si possible, des exemples.

**QUESTIONNAIRE Q 1'**

Si vous deviez expliquer à un étudiant de première année ce qu'est une différentielle, et à quoi cela sert, (ces cinq derniers mots ne figuraient pas sur le texte initial)

a) quelle définition donneriez-vous ?

(Cette question a) ne relève pas à proprement parler du sous thème "les différentielles, pour quoi faire?" et ne sera donc pas commentée ici)

b) sur quels exemples vous appuieriez-vous ?

c) sur quels points fondamentaux insisteriez-vous ?

**Réponse attendue**

Celle-ci reprend les éléments de l'introduction de ce sous thème (p 2) eux-mêmes détaillés en annexe.

On attend une insistance sur l'aspect non linéaire des problèmes traités à l'aide des différentielles, ainsi que, en mathématique plus spécialement, sur l'étude locale des fonctions.

**Réponses fréquemment observées**

* Pour le questionnaire Q1, donné dans le cadre du cours de Physique, voici un aperçu des résultats chez des étudiants de Mathématiques Spéciales ( N= 44 ).

| | |
|---|---|
| Les étudiants donnent avant tout des exemples | 80 % |
| dont surtout la thermodynamique | 59 % |
| Plus rarement ils caractérisent les situations : | |
| problèmes à plusieurs variables | 30 % |
| pour traiter les petites variations, les variations élémentaires | 30 % |
| les problèmes non linéaires, quelque chose de non constant, non homogène, non uniforme | 9 % |
| les problèmes locaux | 11 % |
| les milieux continus | 9 % |
| Pour connaître le sens de variation | 2 % |
| Idée d'approximation (linéaire tangente) | 0 % |

Pour le questionnaire Q1', les résultats obtenus chez 85 étudiants de licence de mathématiques sont :

*pour les "points essentiels" évoqués en c) :

33 liens avec les notions voisines: continuité, différentiabilité dérivabilité, existence de dérivées partielles
11 calcul des dérivées partielles et matrices jacobiennes
10 rôle de l'approximation locale
5 propriété d'être une approximation locale
2 difficultés de notation

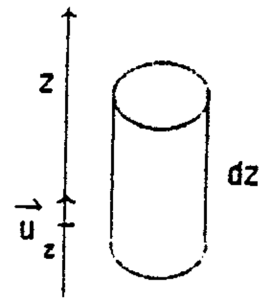
*pour les "exemples" évoqués en b) :

25 exemples simples de fonctions à une et plusieurs variables.
3 calculs de dérivées, changement de variables.
3 exemples "pathologiques".
1 situation d'extremum
5 géométrie différentielle, approximation.
4 allusions à des situations physiques non spécifiées.

## QUESTIONNAIRE Q 2

**Lire attentivement** le calcul suivent, qui vise à établir une expression de la pression atmosphérique en fontion de l'altitude z.

Considérons un élément de volume cylindrique de surface de base (horizontale) S et de hauteur dz. Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :




Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :

Force due à la pression sur la face inférieure : $S.\ p(z)\ \vec{u}_z$

Force due à la pression sur la face supérieure : $S.\ p(z+dz).\ (-\vec{u}_z)$

Poids du volume de gaz : $\rho.\ g.\ S.\ dz.\ (-\vec{u}_z)$

L'équilibre des forces s'exprime ainsi:

$S.\ p(z).\ -S.\ p(z+dz) - \rho.\ g.\ S.\ dz = 0$

ou encore:

$p(z+dz) - p(z) = -\rho.\ g.\ dz$ soit: $\boxed{dp = -\rho.\ g.\ dz}$

**QUESTIONS:**

Dans ce calcul, la hauteur dz de l'échantillon est supposée petite :

Cela est-il nécessaire et si oui pourquoi ?

Doit-on aussi considérer que la surface de base est petite ? Justifiez votre réponse.

La relation (1) est-elle toujours valable s'il s'agit d'établir une expression de la pression non pas atmosphérique mais hydrostatique (il ne s'agit plus de gaz mais d'eau) ?

Si oui, est-il encore nécessaire pour l'établir de considérer que dz est petit ?

**Réponse attendue** :

*Il est nécessaire de faire appel à une procédure différentielle car la relation entre les variations respectives $\Delta p$ et $\Delta z$ de la pression et de l'altitude n'est pas linéaire : en effet la masse volumique $\rho$ du gaz n'est pas indépendante de z (voir commentaires du questionnaire Q1).

Supposer "dz petite" est une manière d'écrire facilement la relation différentielle en utilisant sa propriété d'approximation linéaire.

En fait, l'établissement de cette relation peut se faire de manière rigoureuse, par exemple par encadrement et passage à la limite (voir questionnaire 10). Par ailleurs, la relation différentielle garde tout son sens que dz soit petit ou grand.

* La surface de base du cylindre considéré dans le bilan de force, S , ne doit pas être particulièrement être "considérée comme petite". En effet, tous les termes de force du bilan en dépendent linéairement, à z et dz donnés. Autre façon de dire la même chose : la masse volumique $\rho$ et la pression p ne dépendent que de z et non de la position dans un plan horizontal donné.

* S'il s'agit d'eau maintenant, la relation entre $\Delta p$ et $\Delta z$ est linéaire, car la masse volumique de l'eau est, cette fois, indépendante de z. Inutile, donc, de "découper en tranches", et l'on peut écrire, quelque soit $\Delta z$:

$$\Delta p = \rho \,.\, g \,.\, \Delta z$$

**Réponses fréquemment observées**

Le tableau ci-dessous résume les résultats d'enquête auprès d'étudiants de première année universitaire:

| Résumé de la question | Réponse | Taux de réponse | | |
|---|---|---|---|---|
| "dz petite": est-ce nécessaire? | oui | 83% | 93% | 83% |
| Si oui, pourquoi? | ρ dépend de z | 70% | 20% | 30% |
| | ρ dépend de z | 0% | 5% | 10% |
| Est-ce encore nécessaire s'il s'agit d'eau? | non | 0% | 15% | 15% |
| | | N=18 | N=26 | N=49 |

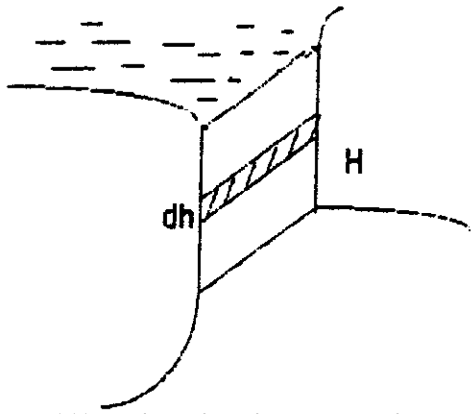
Il ressort de ceci que les étudiants reconnaissent une situation -la colonne d'air - où l'on doit mettre en jeu une procédure différentielle, sans pour autant être capable d'expliciter le critère d'utilité correspondant. Il est possible que certains de ceux qui répondent "parce que p dépend de z" aient compris qu'alors ρ dépend aussi de z mais le petit nombre de ceux qui mettent ce critère en jeu dans le cas de l'eau est frappant. On note, en revanche, une délectation générale dans les termes "tranches", "élémentaires".

La grande majorité des étudiants voit très bien qu'il n'est pas nécessaire que "S" soit petite" Les principales justifications sont:

"S n'intervient pas dans la formule"
"S est constant",
"z est constant sur S"

## QUESTIONNAIRE 03

**LIRE ATTENTIVEMENT** le texte d'exercice et la solution suivante:




TEXTE Soit un barrage rectangulaire de largeur L et de profondeur H. On veut calculer la force résultante exercée sur le barrage.

SOLUTION Soit $\rho$ la masse volumique de l'eau

$p$ la pression exercée par l'eau sur le barrage.

On découpe la surface du barrage en petites bandes horizontales de profondeur h, de largeur dh, de surface $dS = L.\, dh$.

Pour chacune d'elles : $p = p_0 + \rho.g.h$  $p_0$ : pression atmosphérique,
La force exercée a pour module $dF = (p-p_0)\, dS = \rho.g.\, h\, .L.dh$

Donc la force totale exercée sur le barrage est:

$$F = \int_0^H \rho.g.L.h.dh = \rho.gL.\frac{H^2}{2}$$

* **REPONDRE ENSUITE** aux questions suivantes :

* Pourquoi éprouve-t-on le besoin de découper la surface du barrage en petite bandes horizontales ?

* L'expression obtenue pour la force est-elle exacte ou approchée ? Justifiez votre réponse.

**Réponse attendue**

* Conformément à ce qui a été détaillé plus haut (Q1 et 2), on attend une réponse centrée sur la non linéarité de la relation entre force exercée sur une portion du barrage et surface de cette portion, non linéarité due au fait que la pression sur le barrage dépend de la profondeur.

* On attend également que la procédure d'intégration elle-même ne soit associée à aucune approximation

Il faut en effet distinguer deux niveaux d'approximation:

- l'un est lié à une éventuelle simplification de la modélisation : il s'agit ici de l'assimilation du barrage à un plan vertical carré, et de l'assimilation de $\rho$ et g à des facteurs indépendants de z

- l'autre pourrait être lié à la procédure différentielle utilisée pour le calcul de l'intégrale : à ce niveau, aucune approximation ne s'introduit dans le résultat.

**Réponses fréquemment observées.**

Parmi des étudiants de première année universitaire (N = 48), et pour justifier le découpage en "petites bandes horizontales"

50 % invoquent la dépendance de la pression vis à vis de z (réponse correcte)

20 % invoquent la dépendance de la force vis à vis de z (ou du point M) , ce qui constitue une erreur analogue à celle des étudiants qui, à propos de la colonne d'air, disent qu'il faut la découper en tranches car la pression dépend de z sans avoir pour autant compris que cela n'importait que via la dépendance de la masse volumique $\rho$ vis à vis de z.

Le reste des étudiants se contente, dans sa grande majorité, d'invoquer les termes rituels "terme différentiel", "quantité infinitesimale"......

40 % environ des étudiants considèrent que la procédure d'intégration conduit à un résultat exact tandis qu'un tiers pensent, plus ou moins explicitement, qu'il s'agit d'une procédure approchée.

"approchée, car cela dépend du nombre de portions"
"approchée, car p est mal calculée"
"exacte si on prend la valeur limite de l'intégrale"

On ne voit pas dans ces réponses une distinction claire entre la valeur de l'intégrale et celle qu'on obtient éventuellement par calcul numérique approché.

Il est probable qu'il y a, précisement, adhérence entre ces deux notions dans l'esprit des étudiants.

Aucun, par ailleurs, ne fait allusion à l'existence des deux niveaux d'approximation (éventuelle) dégagés ci- dessus : celui lié à la modélisation et celui lié au calcul.

Dans ces questions, on essaie de défavoriser la procédure algorithmique usuelle (f est différentiable en M parce que $C^1$ au voisinage de M) et de favoriser au contraire la prise en compte de l'aspect approximation linéaire : f est donnée sous forme de développement limité à l'origine, le reste est relativement complexe et comporte une racine qui s'annule à l'origine.

**QUESTIONNAIRE Q 4**

* Montrer que la fonction f de IR2 dans IR définie par
$f(x,y,) = x + 3y + x^2 (\sqrt{|\sin x|} + y^{3})$
est différentiable en (0,0) et préciser sa différentielle en ce point.

**OU BIEN**

* La fonction f de $IR^2$ dans IR définie par :
$f(x,y) = 2x + 4y + y^3. (\sqrt{1-\cos x} + x^2)$
est-elle différentiable au point (0,0) ? Justifiez votre réponse.

**Réponse attendue :**

Elle est calquée, pour ces deux questions du même type, sur le "corrigé" suivant, établi pour la seconde de ces questions :

$$f(x,y) = 2x + 4y + y^3.(\sqrt{1-\cos x} + x^2)$$

L'expression de f est formée à l'évidence d'une partie linéaire $2x + 4y$ et d'une partie $y^3.(\sqrt{1-\cos x} + x^2)$ qui semble être d'ordre supérieur. Pour montrer que f est différentiable en (0,0), il suffit donc de vérifier que $y^3.(\sqrt{1 - \cos x} + x^2)$ est bien de la forme $||(x,y)||.\ \varepsilon(x,y)$ avec $\lim \varepsilon_{(x,y)\to(0,0)} = 0$, $||(x,y)||$. désignant l'une quelconque des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^2$. On peut par exemple utiliser la "norme du sup" définie par :

$$||(x,y)|| = \sup(|x|,|y|)$$

et on a

$$|y^3(\sqrt{1-\cos x} + x^2)| \leq ||(x,y)||^3.\left[\sqrt{2} + ||(x,y)||^2\right]$$
$$\leq ||(x,y)||.\left[||(x,y)||^2.(\sqrt{2}+||(x,y)||^2)\right]$$

L'expression $y^3.(\sqrt{1 - \cos x} + x^2)$ est donc bien de la forme $||(x,y)||.\ \varepsilon(x,y)$ avec $\lim \varepsilon_{(x,y)\to(0,0)} = 0$ puisqu'elle est majorée en valeur absolue par une expression de ce type.

La fonction est différentiable en (0,0) et sa différentielle en ce point est l'application linéaire de $\mathbb{R}2$ dans $\mathbb{R}$ :

$$(h,k) \to 2h + 4k$$

Ce qui peut également s'écrire :

$$df_{(0,0)} = 2\,dx + 4\,dy.$$

Remarque 1 : on peut attendre des étudiants que, face à un exercice de ce type, ils se précipitent vers l'algorithme usuel en termes de dérivées partielles. Notons que , dans ce cas, son usage pose problème. En effet, à cause du radical qui s'annule pour x = 0, l'expression algébrique obtenue pour la dérivée partielle $\frac{\delta f}{\delta x}$ ne sera valable que pour $(x,y) \neq (0,0)$ et la démonstration de l'existence et de la continuité de cette dérivée partielle en (0,0), qui fait partie de l'algorithme usuel de preuve de la différentiabilité (f est différentiable si f est $C^1$) passe par le calcul direct de la dérivée partielle : $\frac{\delta f}{\delta x}(0,0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

ou l'utilisation de théorèmes liant limite et continuité, plus sophistiqués.

Remarque 2:

Nous avons détaillé ici la majoration du reste. Dans le cas d'étudiants avancés, une preuve du type :

$2x + 4y$ est linéaire et $y^3 ( \sqrt{1-\cos x} + x^2 )$ est de la forme $\|(x,y)\| . \varepsilon(x,y)$ avec $\lim \varepsilon_{(x,y) \to (0,0)} = 0$

serait tout à fait admise.

**Réponses fréquemment observées.**

Parmi 77 étudiants de licence de mathématiques, les principaux résultats sont les suivantes :

46 Calculs de dérivées partielles, pour argumentation (rarement correcte) sur la base de ces dérivées partielles.

11 Reconnaissance d'un développement limité.

16 Expressions "quotient" ou "ligne" de la différentiabilité avec un reste (dont 7 expressions "quotient" erronnées et recalcul des dérivées partielles)

2 Fonction différentiable car somme, ou produit, ou composée de fonctions différentiables.

2 Séparation de la partie polynomiale puis traitement séparé du radical.

De plus, même quand les étudiants reconnaissent un développement limité, ils ont le plus grand mal à prouver que le reste est bien un reste. Les rares à y parvenir sont ceux qui transforment l'expression en passant en coordonnées polaires, mais aucun ne mène directement des considérations sur le degré des différents termes.

Dans ce questionnaire, il s'agit d'amener les étudiants, sans qu'il y ait parasitage possible par une pratique algorithmique, à réfléchir sur les renseignements effectivement fournis par les écritures d'approximation locale.

Il s'agit en particulier de les amener à rejeter les deux convictions erronées suivantes, très répandues :

- plus une approximation comporte de termes, meilleure elle est,
- les termes en " $\varepsilon$ " sont toujours négligeables par rapport aux autres.

## QUESTIONNAIRE Q 5

Ayant à déterminer des approximations d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ au voisinage du point (0,0), des étudiants ont proposé les réponses suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $E_1$ | $f(x, y) = 2x + 3y + \varepsilon(x,y)$ | avec $\varepsilon(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to 0$ |
| $E_2$ | $f(x, y) = 5x + 4y + xy + (x^2 + y^2)\,\varepsilon(x,y)$ | " |
| E3 | $f(x, y) = 2x + 3y + 2xy + \sqrt{x^2 + y^2}.\varepsilon(x,y)$ | " |
| E4 | $f(x, y) = 2x + 3y + \sqrt{x^2 + y^2}.\varepsilon(x,y)$ | " |
| E5 | $f(x, y) = 5x + 4y + \varepsilon(x,y)$ | " |
| E6 | $f(x, y) = 5x + 4y + (x^2 + y^2)\,\varepsilon(x,y)$ | " |
| E7 | $f(x, y) = 5x + 4y + (x^2 + y^2) + \varepsilon(x,y)$ | " |
| E8 | $f(x, y) = 2x + 3y + xy + (x^2 + y^2)\,\varepsilon(x,y)$ | " |

**Questions :**

Quelles sont parmi ces 8 approximations, celles qui sont compatibles entre elles ?

Dans chaque groupe de réponses compatibles, pouvez-vous classer les approximations de la moins précise à la plus précise ?

**Réponse attendue:**

Les 8 réponses proposées se classent du point de vue de la compatibilité en 3 groupes avec pour chacun d'eux le préordre suivant (par précision croissante) :

$$\{E_1 \;\; E_5 \;\; E_7\} < \{E_3 \;\; E_4\} < E_8$$

$$\{E_1 \;\; E_5 \;\; E_7\} < E_6$$

$$\{E_1 \;\; E_5 \;\; E_7\} < E_2$$

En effet :

-E1, E5, E7, sont des approximations d'ordre 0 de f. Elles assurent simplement que la fonction f a une limite nulle à l'origine.

-E3, E4, sont des approximations d'ordre 1 de f, compatibles. Le terme xy n'apporte aucune précision supplémentaire puisque l'incertitude apportée par le terme $\sqrt{x^2+y^2}.\varepsilon(x,y)$ n'a pas de raison d'être d'ordre supérieur à celui de xy, a priori.

-E6 et E2 sont aussi des approximations d'ordre 1, vu l'unicité de la différentielle, elles sont incompatibles avec E3, E4, et E8. Elle sont aussi incompatibles entre elles puisque ce sont deux approximations au second ordre qui diffèrent d'un terme d'ordre 2.

Dans ces questions, les deux versions permettent deux présentations l'une en terme de différentielle, l'autre en terme de développement limité ; elles permettent aussi de comparer les erreurs suivant que le développement est effectué ou non au voisinage de l'origine.

**QUESTIONNAIRE Q 6**

*Soit f la fonction de $IR^2$ dans R définie par :

$f(x, y) = \exp(x^2+y)\cos(xy)$

-Déterminer une approximation au premier ordre de f au voisinage du point (0,0) et en donner une interprétation géométrique.

-En déduire une valeur approchée de $f(10^{-2}, 10^{-2})$

**OU**

*Soit la fonction de $IR^2$ dans R définie par:

$f(x, y) = \cos(xy).\exp(y^2+x)$

-Déterminer la différentielle de f en (1,0) et en donner une interprétation géométrique.

-En déduire une valeur approchée de f (1.001, 0.01).

**Réponse attendue**

Pour ces deux versions, la réponse attendue est à calquer sur le "corrigé" suivant, établi pour le deuxième exercice :

*La fonction f est de classe $C^\infty$ donc différentiable au point (1,0). Pour calculer la différentielle en ce point, le plus simple est de calculer les dérivées partielles.

On obtient $\frac{\delta f}{\delta x}(1, 0) = e$ $\qquad \frac{\delta f}{\delta y}(1,0) = 0$

La différentielle est donc en ce point l'application

$(h, k) \to eh$

ou $df = e\,dx$

* L'interprétation géométrique attendue est celle du plan tangent. A la fonction f est associée une surface S de $IR^3$ d'équation

$z = \cos(xy).\exp(y^2+x)$

Cette surface admet un plan tangent au point (1,0,e) et ce plan tangent a pour équation :

$z - e = (x-1)\,e$ soit $z = xe$

Ce plan contient l'axe Oy.

* La connaissance de la différentielle de la fonction f au point (1,0) fournit une approximation de f au voisinage de ce point puisque :

$f(x, y) = f(1, 0) + e(x-1) + \|(x-1,y)\| . \varepsilon(x, y)$

avec $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \varepsilon = 0$

On a donc au voisinage de (1,0), une approximation au premier ordre qui est : ex.

Pour (1.001, 0.01), on obtient 1.001 . e.

<u>Remarque 1</u> : il est bien clair que n'importe quelle calculette fournit elle-aussi une approximation, sans qu'il soit besoin de déterminer la différentielle de la fonction.

<u>Remarque 2</u> : dans la première version du test, on étudie une fonction au voisinage de (0,0). Pour calculer sa différentielle, on peut tout aussi bien multiplier les développements limités à l'ordre 1 du cosinus et de l'exponentielle que calculer les dérivées partielles :

$\cos(xy) = 1 + 0\,(x, y)$
$\exp\,(x^2+y) = 1 + y + 0(x, y)$
donc $f(x, y) = 1 + y + 0(x, y)$

**Réponses fréquemment observées.**

Ce questionnaire a ete aborde par 74 etudiants de licence de mathematiques qui, pour la plupart, calculent les derivées partielles des fonctions considérées.

La partie interprétation géométrique, elle, n'est abordée que par 31 étudiants.

8 interpretent correctement la differentielle en reference au plan tangent à la surface associée a la fonction donnee dans $IR^3$.

10 ne parviennent pas a se detacher du registre interpretatif en dimension 1. (courbe et tangente).

8 ne donnent pas reellement une interpretation geometrique ("f est voisin de, ou égal à, 1 + y au voisinage de (0,0) "ou" c'est le théorème des fonctions implicites")

1 interprète en point selle

1 interprète en quadrique

3 fournissent des interpretations incomprehensibles.

On est donc frappe par le petit nombre de ceux qui abordent la question de l'interpretation geometrique et, parmi eux, de ceux qui parlent de plan tangent.De façon générale, les différentielles sont très faiblement appuyées, chez les étudiants, par une vision géométrique.

Ce questionnaire renvoie sous forme geometrique au theoreme des fonctions implicites (voir l'annexe)

**QUESTIONNAIRE Q 7**

On considère dans l'espace les deux surfaces $S_1$ et $S_2$ d'équations respectives :

$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ et $(x-1)^2 + 2z^2 + y^2 = 3$

Ces deux surfaces passent par le point (1,1,1).

**QUESTIONS:**

1)Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? (justifiez votre reponse)

"Au voisinage du point (1,1,1), l'intersection de $S_1$ et $S_2$ est une courbe parametrable en x, en y ou en z."

2) Y-a-t-il pour vous un rapport entre la question posée et le théorème des fonctions implicites ? Si oui lequel ?

**Réponse attendue :**

Les surfaces $S_1$ et $S_2$ sont des ellipsoides. Elles se coupent donc suivant une courbe. En $(1,1,1)$, $S_1$ et $S_2$ ont des plans tangents dont l'equation est obtenue par linearisation (ou differentiation) des equations des ellipsoides.

Pour $S_1$ , c'est le plan d'équation :

$2(x-1) + 4(y-1) + 2(z-1) = 0$ soit $2x + 4y + 2z = 8$

Pour $S_2$ , c'est le plan déquation :

$4(z-1) + 2(y-1) = 0$ soit $2y + 4z = 6$

Ces deux plans sont distincts et se coupent suivant une droite tangente en $(1,1,1)$ a la courbe d'intersection.

Cette tangente peut se parametrer en x, y ou z. Il en est donc de meme, localement, de la courbe d'intersection.

On utilise la, dans sa version geometrique, le theoreme des fonctions implicites. Si on designe par F l'application de $IR^3$ dans $IR^2$ définie par :

$$(x,y,z) \to (x^2 + 2y^2 + z^2, (x-1)^2 + 2z^2 + y^2) ,$$

cette application est $C^1$ sur $IR^3$. Sa ligne de niveau $(4,3)$ passe par le point $(1,1,1)$

La matrice jacobienne en $(1,1,1)$ est egale a :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Elle est de rang 2 et tous les déterminants d'ordre 2 sont non nuls.

Il s'ensuit que l'équation $F(x,y,z,) = (4,3)$ se résoud localement en x, y ou z au choix, fournissant l'équation d'une courbe qui correspond a l'intersection des 2 surfaces.

En fait le systeme lineaire correspondant aux equations des deux plans tangents :

$2x + 4y + 2z = 8$

$2y + 4z = 6$

s'écrit $$J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

et le fait qu'on puisse le resoudre en x,y, ou z signifie que les determinants d'ordre 2 de J sont non nuls.

# II Différentielles et calculs d'incertitude

Lorsqu'on effectue le calcul d'une grandeur à partir d'autres imparfaitement evaluees, on obtient pour cette grandeur une valeur entachee d'erreur. L'évaluation de l'erreur maximum que l'on fait, autrement dit de l'incertitude, se fonde classiquement sur le formalisme différentiel (voir annexe). Les questionnaires qui suivent conduisent à critiquer un type de justification des procédures de calcul qui est à la fois très courant et erroné.

**QUESTIONNAIRE 08**

• **LISEZ ATTENTIVEMENT** le texte ci dessous, extrait de "Calcul différentiel et intégral" N. Piskounov. Ed. de Moscou. :

**§ 9. Emploi de la différentielle pour évaluer l'erreur commise pendant les calculs numériques.**

Soit

$u = f(x,y,z,\ldots,t)$

une fonction des variables $x,y,z,\ldots,t$. Supposons que l'evaluation des valeurs numeriques des quantites $x,y,z,\ldots,t$ soit faite avec une certaine erreur (respectivement a $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z,\ldots$ pres). La valeur de u sera egalement determinee avec une certaine erreur

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots, t)$$

due à l'erreur d'évaluation des variables indépendantes. Proposons-nous d'évaluer l'erreur $\Delta u$, si l'on suppose connues les erreurs $\Delta x$, $\Delta y,\ldots,\Delta t$.

Les valeurs absolues des $\Delta x$, $\Delta y$, ..., $\Delta t$, etant supposees suffisamment petites, on peut remplacer l'accroissement total de la fonction par la différentielle totale ; on obtient alors l'égalité approchée.:

$$\Delta u \approx \frac{\delta f}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\Delta y + \ldots + \frac{\delta f}{\delta t}\Delta t$$

Les derivees partielles et les erreurs relatives aux variables indépendantes sont soit positives, soit négatives. Remplaçons-les par leurs valeurs absolues : on trouve alors l'inégalité.:

$$|\Delta u| \leq \left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right| |\Delta y| + \ldots + \left|\frac{\delta f}{\delta t}\right| |\Delta t|$$

Si l'on désigne par $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$, .. $|\Delta^* t|$ les erreurs absolues maximales des variables correspondantes (les bornes des valeurs absolues des erreurs), on peut évidemment admettre que :

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\delta f}{\delta t}\right| |\Delta^* t|$$

Exemples.

1) soit $u = x + y + z$, alors

$$|\Delta{*}u| = |\Delta{*}x| + |\Delta{*}y| + |\Delta{*}z|$$

2) soit $u = x - y$, alors

$$|\Delta{*}u| = |\Delta{*}x| + |\Delta{*}y|$$

3) soit $u = xy$, alors

$$|\Delta{*}u| = x|\Delta{*}y| + y|\Delta{*}x|$$

4) soit $u = \frac{x}{y}$ , alors

$$|\Delta u| = \left|\frac{1}{y}\right| |\Delta{*}x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta{*}y| = \frac{y|\Delta{*}x| + x|\Delta{*}y|}{y^2}$$

* **REPONDEZ ENSUITE** à cette question :

La demonstration ci dessus contient une erreur de raisonnement. Situez la et illustrez la sur ceux des exemples donnes dans le texte qui vous semblent convenir.

**Réponse attendue**

L'evaluation de l'accroissement de la valeur prise par u se fait,dans le formalisme differentiel, de la facon suivante

$$\Delta u = \frac{\delta f}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta f}{\delta t}\Delta z + \|(\Delta x, \Delta y)\|\,\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$\|(\Delta x, \Delta y)\|$ désignant l'une quelconque des normes équivalentes sur $IR^2$

En negligeant dans l'accroissement de la fonction les termes d'ordre superieur a 1 par rapport aux accroissements des variables, on obtient l'egalite approchee :

$$\Delta u \approx \frac{\delta f}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta f}{\delta t}\Delta z$$

qui équivaut a remplacer l'accroissement par la différentielle. Il serait en revanche faux d'écrire l'inegalite :

$$\Delta u \leq \frac{\delta f}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta f}{\delta t}\Delta z$$

Le fait de remplacer toutes ces quantités par leurs valeurs absolues n'apporte aucune légitimité à cette inégalité (il suffit d'imaginer un cas ou elles sont toutes positives pour s'en convaincre).

Les deux premiers exemples cites concernent des fonctions linéaires : les différentielles nont pas lieu d'y être impliquées, (ou, si l'on préfère, le reste est alors nul)

Le troisième exemple, illustré à l'aide de valeurs positives de $x$, $\Delta x$, $y$, $\Delta y$, met bien l'erreur en évidence :

$x = 3,\ y = 5,\ \Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}5,$

$\Delta(x.y) = (3{,}1 \,.\, 5{,}5) - (3.5) = 2{,}05$

$x\Delta y + y\Delta x = 3.0{,}5 \quad + 5.0{,}1 = 2$

on a donc ici

$\Delta(x.y) > x\Delta y + y\Delta x$

On peut fabriquer un contre exemple analogue a l'aide du quatrieme exemple du texte.

## QUESTIONNAIRE Q 9

Pouvez-vous, en utilisant les différentielles, justifier les formules suivantes bien connues du calcul d'incertitudes :

$$\frac{\Delta uv}{uv} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$$

$$\frac{\Delta u/v}{u/v} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$$

**Réponse attendue :**

Non, pour la raison détaillée à propos du questionnaire précédent. Pour une réponse plus nuancée, se référer à l'annexe;

**Réponse fréquemment observée :**

99,9 % des enseignants de physique proposent une justification analogue a celle du texte de Piskounov qui figure sur le questionnaire précédent.

Chez les étudiants, les cas d'écritures directes en Δ par dérivation, sans aucune allusion à un reste, sont fréquents. Il y a extrêmement peu de prise en compte des valeurs absolues et majorations. Au mieux dit-on, pour modifier le signe - qui intervient dans le quotient, que "les incertitudes s'ajoutent".

# III Exactitude des calculs. Rigueur des démonstrations

Associee a la notion d'approximation, la notion de différentielle est parfois aussi, indûment, associée à celle de "rigueur approximative". Les questionnaires qui suivent portent sur la rigueur des demonstrations utilisant des différentielles et menant soit à l'expression intégrale d'une grandeur (q10 à q13), soit à une équation différentielle (q 14 et 15). On trouvera en annexe une mise au point sur les démarches à adopter pour justifier rigoureusement les procedures utilisées dans ces types de probléme. Les "réponses attendues" correspondant a chacun de ces questionnaires illustrent, a chaque fois une ou deux démarches rigoureuses possibles, mais sans faire le tour complet de la question.

**QUESTIONNAIRE Q 10**

**LIRE LE TEXTE SUIVANT**

On se propose de calculer la volume d'une sphère de rayon R.

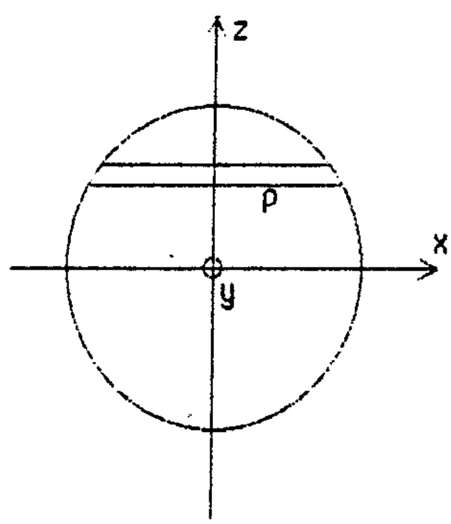
A cet effet on découpe celle-ci en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphere (plan x0y, cf schéma ci-joint) et d'épaisseur dz petite.

Le volume d'une tranche d'altitude z est :

$$dV = \pi\rho^2 dz = \pi(R^2 - z^2)\, dz$$

Donc le volume total est :

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2)\, dz$$




**QUESTIONS SUR CE TEXTE**

Pouvez-vous justifier plus rigoureusement ce calcul ?

Si oui, comment ?

**Réponse attendue**

* Une justification rigoureuse possible est du type : encadrement avec passage a la limite. Les étapes du raisonnement sont les suivantes :

Volume d'une tranche : $\Delta V$

Hauteur d'une tranche : $\Delta z$:

Encadrement $\quad \mathrm{Min}[S(z)]\,\Delta z \le \Delta V \le \mathrm{Max}[S(z)]\,\Delta z$

ou $\quad \mathrm{Min}\,[S(z)] \le \dfrac{\Delta V}{\Delta z} \le \mathrm{Max}\,[S(z)]$

ou

passage a la limite

+ $S(z)$ continue

$$\downarrow$$

$$S(z) \le \frac{dV}{dz} \le S(z)$$

Donc $\quad \dfrac{dV}{dz} = S(z) \quad$ et $\quad V = \int S(z)dz$

<u>Remarque</u> : Cette procedure d'encadrement avec passage a la limite n'est pas toujours possible. L'application en est ici tout à fait indiquée du fait qu'il s'agit d'un volume de revolution.

* Une justification moins détaillée mais tout à fait admissible, et en tout état de cause nécessaire en l'absence d'une autre, est que le terme négligé dans l'expression du volume d'une tranche est du deuxième ordre.

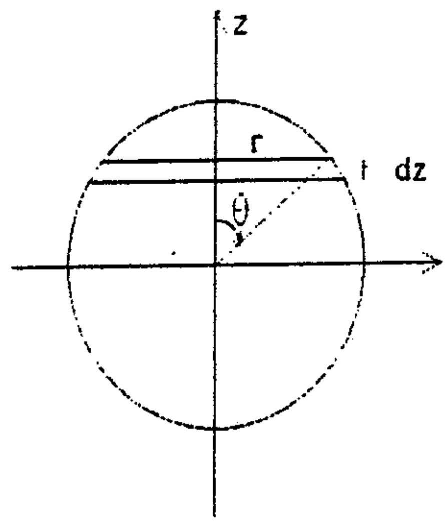
**Réponse fréquemment observée**

Cette question, posee parmi d'autres plus algorithmiques, est volontiers laissée de côté par les étudiants qui s'y sentent mal à l'aise. La plupart acceptent la démonstration telle quelle, en ajoutant quelques phrases incantatoires du type, "pourvu que dz soit aussi petit que possible".

On suggere frequemment (30 % dans certains groupes de premier cycle universitaire) l'emploi de coordonnees cylindriques ou spheriques, sans plus de detail.

**QUESTIONNAIRE Q 11**

Pour calculer le volume d'une sphère de rayon r, on peut la découper en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphère (par exemple le plan xOy, comme sur le schéma ci-après) et d'épaisseur dz.




On assimile alors le volume dV d'une petite tranche d'altitude z à celui d'un cylindre de même épaisseur dz ayant pour section droite l'une des faces planes de la tranche de sphère considérée

$dV = \pi R^2\, dz = \pi(R^2 - z^2)\ dz$

Donc le volume total est :

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2)\, dz = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Si on utilise la même methode (qui consiste à assimiler tranche de sphere et cylindre) pour evaluer la surface de la sphere, on obtient, pour l'aire laterale d'une tranche elementaire a l'altitude z :

$$dS = 2\pi\, r\, dz = 2\pi \sqrt{(R^2 - z^2)}\, dz$$

donc pour l'aire totale :

$$S = 2\pi \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - z^2}\, dz = \int_{0}^{\pi} 2\pi R^2 \sin^2\theta\ \ d\theta = \pi^2 R^2$$

Pouvez vous expliquer pourquoi la meme methode donne, dans le premier cas un resultat correct et dans le second cas un resultat faux ?

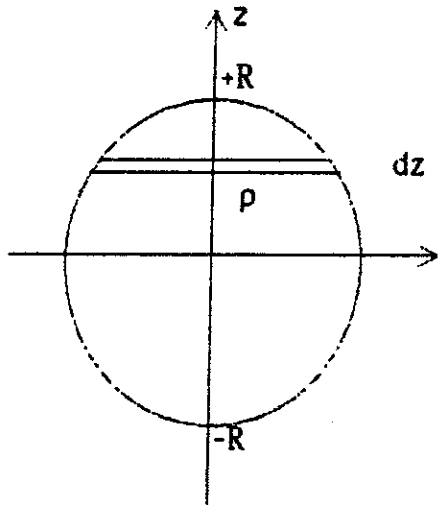
Ou encore :

## QUESTIONNAIRE Q 12

## I LIRE LA DEMONSTRATION SUIVANTE

On se propose de calculer la surface d'une sphere par integration. A cette fin on decoupe la sphere en tranches cylindriques infiniment petites dz.
L'aire laterale d'une telle tranche est

$dS = 2\pi\rho\, dz = 2\pi\sqrt{(R^2-z^2)}\, dz$




Donc la surface totale vaut:

$$S = \int_{-R}^{+R} 2\pi\sqrt{R^2-z^2}\, dz = \int_{-\pi}^{0} -2\pi R^2 \sin^2\theta\, d\theta$$

$$S = 2\pi R^2 \int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$S = \pi^2 R^2$$

## II QUEL(S) REPROCHE(S) LUI FAITES-VOUS ?

**Réponse attendue et diverses réflexions préalables.**

L'elucidation semble plus simple, si on descend d'une dimension, en se plaçant **dans le plan** :

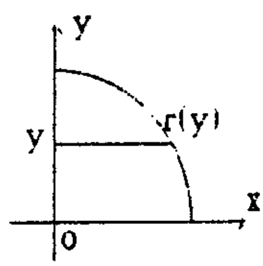
Alors sphère -> disque

volume -> aire

aire -> longueur

1°) on calcule l'aire du disque en le decoupant en tranches et en approchant chaque tranche par un rectangle.

Considérons par exemple le quart de disque supérieur droit :




et la fonction definie sur le segment [0,R] qui a y associe l'abscisse du point du quart de cercle d'ordonnee y : c'est en fait la fonction $y \to r(y)$ Cette fonction est continue donc integrable et l'aire du quart de disque et egale a $\int_0^R r(y)dy$

Faire un découpage en tranches horizontales revient à approcher cette fonction par une fonction en escalier $\phi$. Lorsque l'épaisseur des tranches tend vers zéro, les fonctions associées convergent uniformément vers r et, par la définition même de l'intégrale de Riemann, l'intégrale de $\phi$, c'est à dire l'aire de l'empilement converge vers l'intégrale de f, c'est à dire l'aire du disque.

La longueur du quart de cercle s'obtient elle-aussi par une integrale mais celle-ci fait intervenir non pas la fonction r mais sa derivee r' :

$$L = \int_0^R \sqrt{1+r'^2(y)}\ dy$$

Et il est bien connu que la convergence uniforme d'une suite de fonctions derivables n'entraine pas de façon automatique celle de la suite des derivees. Il s'ensuit qu'une methode d'approximation qui marche pour l'aire ne marche pas nécessairement pour la longueur.

Ici, pour tout découpage, on obtient un longueur de R. alors que la longueur du quart de cercle est : $\frac{\pi}{2}R$

2°) On peut voir le probleme sous un angle plus "differentiel" en cherchant comment on va pouvoir reconnaitre localement une bonne approximation.

Considérons l'aire comme une fonction de y : A $(y_0)$ est l'aire de la portion de quart de disque correspondant a $0 \le y \le y_0$. Si l'aire $A(y+\Delta y)-A(y)$ de la tranche d'épaisseur $\Delta y$ situee a la hauteur y est approchée, en fonction de y, par une quantité $B(y)\Delta y$, cette approximation est convenable (c'est à dire $A(R) = \int_0^R B(y)dy$ ) si c'est l'approximation au premier ordre de l'aire de la tranche c'est a dire si : $A(y+\Delta y) - A(y) = B(y)\Delta y + \Delta y\, \varepsilon(\Delta y)$ avec $\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$

En effet, il ressort immediatement de cette egalite que la fonction A est differentiable, de derivee B et donc que, par le theoreme fondamental du calcul differentiel et integral :

$$A(y) = \int_0^y B(z)dz \qquad \text{pour } y \in [0,R]$$

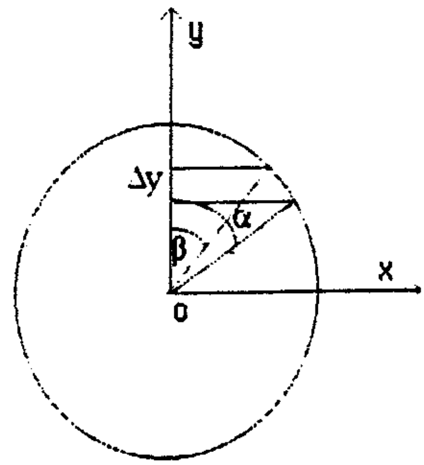
Dans le cas qui nous intéresse ici :

- <u>pour le calcul de l'aire</u>, on a
$r(y+\Delta y)\Delta y \le A(y+\Delta y) - A(y) \le r(y)\Delta y$

La fonction r etant continue, $r(y+\Delta y) = r(y) + \varepsilon(\Delta y)$ avec $\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$

Il s'ensuit que l'on a bien :
$A(y+\Delta y) - A(y) = r(y)\,\Delta y + \Delta y\, \varepsilon_1(\Delta y)$ avec $\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_1(\Delta y) = 0$
le découpage materialise en fait l'approximation linéaire.

<u>pour le calcul de la longueur</u> :




alors la longueur de l'arc est : $R(\alpha-\beta)$

la longueur de la corde est : $2R \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

et $\Delta y = R(\cos\beta - \cos\alpha)$

$\Delta y = 2R \sin\frac{\alpha-\beta}{2} . \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

Lorsque $\Delta y$ tend vers 0, $(\alpha-\beta)$ tend vers 0 et l'on a, en fonction de $\Delta y$, pour $\alpha \neq 0$

-la longueur de l'arc équivalente à $\frac{\Delta y}{\sin\alpha}$

-la longueur de la corde equivalente a $\frac{\Delta y}{\sin\alpha}$

L'approximation par $\Delta y$ n'est donc pas satisfaisante, tandis que celle par la corde associee a la tranche l'est. (on retrouve en fait la longueur du cercle comme limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dans le cercle lorsque le pas de la subdivision tend vers 0).

<u>remarque 1</u> : quand on approche l'arc par la corde, on n'a pas une approximation de la forme $B(y)\Delta y$, mais une approximation de la forme $B_1(y,\Delta y)\Delta y$ L'adéquation de l'approximation vient de ce que sa partie linéaire en $\Delta y$ correspond bien à la dérivée de A, c'est à dire au fait que

$B_1(y,\Delta y) = B(y) + \varepsilon(\Delta y)$ avec $\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$

Cette situation sera celle qui se produit le plus généralement.

<u>remarque 2</u> : *il découle de ceci que les justifications du type : ça marche parce que, quand $\Delta y$ tend vers 0, l'empilement tend vers le disque, s'ils font référence à une convergence uniforme reconnue perceptivement, sont en fait recevables pour le calcul de l'aire du disque mais non pour celui de sa longueur.

*quand on raisonne localement sur une tranche, l'argument : "ça marche parce que, quand $\Delta y$ tend vers 0, l'aire de la partie négligée tend vers 0" n'est pas recevable.

*quand on raisonne localement, l'argument :"ça marche parce que, quand $\Delta y$ tend vers 0, la corde tend vers l'arc" n'est pas recevable non plus.

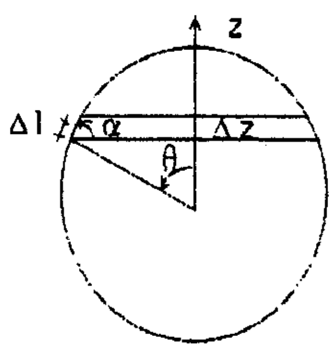
**Dans l'espace**

Si l'on définit, pour simplifier (cf annexe), l'aire de la surface de révolution comme la fonction $z \to S_1(z)$ dont la variation est approchée au premier ordre par l'aire du tronc de cône correspondant, alors on peut donner la justification suivante :

*L'aire latérale du tronc de cône est
$\Delta S_2 = \pi \Delta l\, [\, r(z+\Delta z) + r(z)\, ]$

C'est l'aire latérale d'un cylindre droit de rayon

$\dfrac{r(z) + r(z+\Delta z)}{2}$ et de hauteur $\Delta l$.



Cette aire s ecrit, en utilisant la continuite de la fonction $r(z)$:
$\Delta S_2 = 2\pi R \,\Delta z + \varepsilon(z,\Delta z)\Delta z$
avec $\lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon(z,\Delta z) = 0$

Donc $dS^2 = 2\pi R dz$ et donc aussi $dS_1 = 2\pi R\, dz$
L'aire laterale du secteur spherique est donc une fonction lineaire de la hauteur du secteur $\Delta S_1 = 2\pi R \Delta z$
On n'avait pas, a priori, de raison de soupconner ce fait.

•L'aire laterale du cylindre est $\Delta S_3 = 2\pi r(z)\Delta z$
soit $\Delta S_3 = \sin\theta(z).\,\Delta S_1$
Donc l'approximation par l'aire du cylindre droit ne remplit pas les conditions requises pour le calcul de l'aire du secteur spherique.

Bien evidemment, une reponse aussi complete que celle qui precede est peut-etre "attendue" mais non "esperee"

Ont ete deja considerees comme signes d'une bonne comprehension les reponses du type :

"Dans la démonstation sur la surface de la sphère, le terme négligé est du premier ordre, alors que dans celle sur le volume, il est du second ordre" ou bien celles-ci, plus allusives :

"il y a un facteur cos α qui ne disparait pas" (entre la hauteur du cylindre elémentaire et la longueur de l'arc correspondant cf le sin θ du corrigé qui précède)

ou meme :

"il y a un probleme au pole !" (sin θ=0)
Un exemple cite par un professeur pour faire comprendre ce "probleme" merite d'etre repris :

"si l'on pose une planche sur un escalier, on pourra faire les marches aussi petites que l'on veut, la surface de la planche ne sera jamais égale à la surface verticale des marches".

**Réponses fréquemment observées** :

On vient de citer celles qui temoignent d'une bonne comprehension du probleme. Moins du tiers des enseignants ou apprentis enseignants (8 élèves de l'ENSET) interrogés ($N_{total} = 35$), relèvent de cette catégorie. Les autres ou bien refont le calcul juste de l'aire du secteur sphérique :
$\Delta S = 2\pi R\Delta z$, sans autre commentaire, ou bien répondent vaguement :

"l'approximation est trop grossière"

"dS ne peut être encadré" (ce qui ne suffit pas à invalider la démonstration)

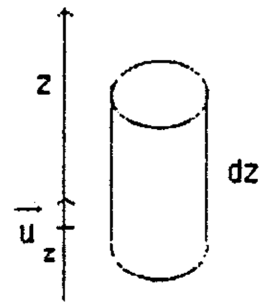
ou bien même remettent en cause la démonstration (juste !) du volume de la sphère :

"Non (je ne peux pas situer l'erreur)... c'est peut être par coincidence qu'on obtient le volume de la sphère par cette méthode puisque, rigoureusement, on ne peut pas prendre $dV = \pi\rho^2dz$ et tout cela m'expliquerait la démonstration fausse de la surface de la sphère".

## QUESTIONNAIRE Q 13

**I Lire attentivement** le calcul suivant, qui vise à établir une expression de la pression atmosphérique en fontion de l'altitude z.

Considérons un élément de volume cylindrique de surface de base (horizontale) S et de hauteur dz. Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :




Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :

Force due à la pression sur la face inférieure : $S.\ p(z)\ \vec{u}_z$

Force due à la pression sur la face supérieure : $S.\ p(z+dz).\ (-\vec{u}_z)$

Poids du volume de gaz : $\rho.\ g.\ S.\ dz.\ (-\vec{u}_z)$

L'équilibre des forces s'exprime ainsi:

$$S.\ p(z). - S.\ p(z+dz) - \rho.\ g.\ S.\ dz = 0$$

ou encore:

$$p(z+dz) - p(z) = -\rho.\ g.\ dz$$

soit: $\boxed{dp = -\rho.\ g.\ dz}$

**II Justifiez, rigoureusement cette fois, la relation différentielle obtenue**

$$dp = -\rho g\ dz$$

**Réponse attendue**

Comme il a ete mentionne a propos du questionnaire 2, l'etablissement de cette relation differentielle peut se faire rigoureusement par encadrement et passage à la limite.

On considère alors un volume d'air cylindrique, de surface de base S et de hauteur $\Delta z$ quelconque. Le principe de calcul est le même que celui du texte proposé : la résultante de toutes les forces est nulle puisque l'échantillon est en équilibre. L'expression du poids doit être établie de façon rigoureuse en sachant que $\rho$ est une grandeur variant de façon continue avec l'altitude, comme d'ailleurs la pression p.

La resultante des forces de pression est alors :

$$\left[S.p(z)-S.p(z+\Delta z)\right]\vec{u}_z$$

Puisque la masse volumique $\rho$ est une fonction continue de z, sa valeur dans l'échantillon est comprise entre sa valeur minimum $\rho_m$ et sa valeur maximum $\rho_M$:

$$\text{Min}\,[\rho(z)] \leq \rho(z) \leq \text{Max}\,[\rho(z)]$$

et le poids $\Delta P$ de l'échantillon est encadrable :

$$S.g.\Delta z.\text{Min}[\rho(z)] \leq \Delta P \leq S.g.\Delta z.\text{Max}[\rho(z)]$$

Comme $[S.p(z) - S.p(z+\Delta z) - \Delta P)].\vec{u}_z = \vec{0}$

on obtient :

$$S.g.\Delta z.\text{Min}[\rho(z)] \leq S.p(z) - S.p(z+\Delta z) \leq S.g.\Delta z.\text{Max}[\rho(z)]$$

soit

$$g.\text{Min}[\rho(z)] \leq \frac{p(z) \;\; -p(z+\Delta z)}{\Delta z} \leq g.\text{Max}[\rho(z)]$$

Il ne reste plus qu'a passer a la limite en faisant tendre $\Delta z$ vers 0

La fonction $z \rightarrow \rho(z)$ étant continue, les valeurs d'encadrement tendent toutes les deux vers la même valeur : $g\,\rho(z)$ et le terme encadré tend lui vers $-\frac{dp(z)}{dz}$ . On établit ainsi rigoureusement la relation différentielle $dp(z) = g.\rho(z).dz$

Remarque : une autre approche rigoureuse permet d'ecrire, grâce a la continuité des grandeurs considérées :

$\Delta P = S.g.\Delta z. (\rho (z) + \varepsilon(\Delta z))$

où $\lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$

d'ou $p(z+\Delta z) = p(z) - g.\rho(z).\Delta z - g.\varepsilon(\Delta z).\Delta z$

ou $\lim_{\Delta z \to 0} [g\varepsilon(\Delta z)] = 0$

ceci assure la differentiablilite de la fonction $z \to p(z)$, la differentielle etant le terme lineaire en $\Delta z$:

$dp(z) = - g.\rho(z).\Delta z$

**QUESTIONNAIRE Q 14**

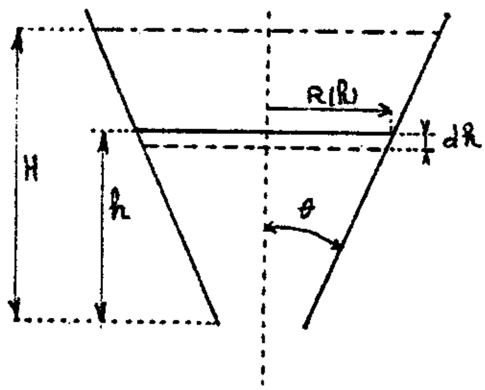
**I Lire attentivement cet exercice et le début de solution rédigé par un physicien.**

En combien de temps se vide un entonnoir ?

On considere un entonnoir conique, avec un orifice circulaire de rayon r, de surface s rempli d'eau jusqu'à la hauteur H.

On admet que la vitesse d'ecoulement a travers un orifice immerge a la profondeur h est donnée par l'expression

$v = 0{,}6\sqrt{2gh}$




Solution

Entre les instants t et t + dt, il s'écoule dV = s vdt. Il s'ensuit une variation de niveau dh telle que (le signe traduisant que l'écoulement entraine une baisse de niveau)

$$S(h)\,\Delta h = -\,s.v\,\Delta t$$

qu'on ecrit $S(h)\,dh = -svdt$

ou S (h) est la surface libre lorsqu'il reste une hauteur h d'eau.

**II Critiquer la cohérence des notations et justifier, rigoureusement cette fois, la relation**

$$S.(h).dh = -\,s.v.dt$$

**Réponse attendue**

Comme dans le questionnaire 12, la relation différentielle peut être obtenue rigoureusement, par une methode d'encadrement et de passage a la limite.

Soit $V(t)$ le volume de liquide restant à l'instant t.

Entre les instants t et $t + \Delta t$, la vitesse d'écoulement, fonction continue du temps, varie mais demeure comprise entre sa valeur minimum $\mathrm{Min}[v(t)]$ et sa valeur maximum $\mathrm{Max}[v(t)]$ :

$$\mathrm{Min}[v(t)] \leq v(t) \leq \mathrm{Max}[v(t)]$$

Le volume d'eau écoulée entre t et $t + \Delta t$ est encadre par

$$s.\mathrm{Min}[v(t)]\,\Delta t \leq V(t) - V(t+\Delta t) \leq s.\mathrm{Max}[v(t)].\Delta t$$

soit

$$s.\mathrm{Min}[v(t)] \leq -\frac{\Delta V}{\Delta t} \leq s.\mathrm{Max}[v(t)]$$

et à la limite $\Delta t \to 0$, les grandeurs étudiées étant continues (voir la "réponse attendue au questionnaire q 12) :

$$-V'(t) = -\frac{dV}{dt} = s.v(t)$$

$$dV(t) = -s.v(t)\,dt$$

Par ailleurs, pour tout corps de revolution, la differentielle du volume est <u>rigoureusement</u> donnee par $dV = S(h)\,dh$ (cf questionnaire 8)

donc $S(h)\,dh = -s\,v(t)\,dt$

On peut aussi, compte tenu de la continuité de la vitesse d'écoulement v, écrire

$$V(t) - V(t+\Delta t) = s.\,\Delta t.(v(t) + \varepsilon(\Delta t))$$

où $\varepsilon(\Delta t)$ tend vers 0 avec $\Delta t$

d'où $V(t+\Delta t) = V(t) - s.v(t)\,\Delta t - s.\varepsilon(\Delta t).\Delta t$

où $\lim_{\Delta t \to 0} [s\varepsilon(\Delta t)] = 0$

Ceci assure la différentiabilité de $V(t)$, la valeur de sa différentielle étant le terme du second membre linéaire en $\Delta t$:

$$dV(t) = -s.v(t).dt$$

## QUESTIONNAIRE Q 15

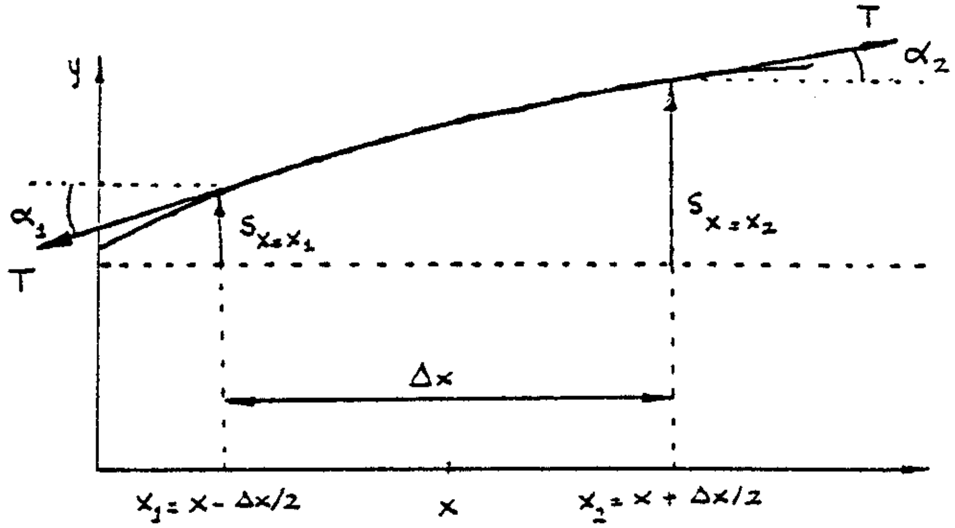
**I Lire attentivement** l'extrait de cours de 2e annee de DEUG, etablissant l'equation de propagation d'une onde transversale de faible amplitude sur une corde horizontale tendue, et figurant pages suivantes.

**II Quelle(s) critique(s) pouvez-vous faire** quant à l'établissement de l'équation différentielle (II.6) ?

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{d^2s}{dx^2} \qquad (II.6)$$

## CHAPITRE II. PROPAGATION DES ONDES LE LONG D'UNE CORDE.

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée $x$, et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Cet ébranlement se produit suivant l'axe y, c'est à dire, dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. On dit alors qu'il s'agit d'une onde transversale.




Etudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par T la tension à laquelle est soumise la corde. On considère un segment très court de cette corde, de longueur $\Delta x$ et centré en $x$. La masse $\Delta M$ du segment est donnée par :

$$\Delta M = \mu . \Delta x \qquad (II.1)$$

où $\mu$ est la densité linéaire de masse de la corde, c.à.d., la masse par unité de longueur (kg/m). Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. On aura donc en général $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (voir figure). Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petite amplitude, si bien qu'on peut faire l'approximation :

$$\sin \alpha_1 \equiv \mathrm{tg}\, \alpha_1 = (ds/dx)_{x=x_1}; \quad \text{et la même chose pour } \alpha_2 \qquad (II.2)$$

où on a dénoté par s le déplacement de la corde par rapport à sa position d'équilibre. Cette approximation néglige aussi l'allongement du segment, et considère donc la tension T comme constante. La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point $x_1$ (qui est une force appliquée vers le bas et égale en module à T $\sin\alpha_1$) et de la force appliquée au point $x_2$ (qui est vers le haut et égale à T $\sin \alpha_2$ ). Si on utilise (II.2), la force totale dans la direction y est donc :

$$F_Y = T\left[\frac{ds}{dx}\right]_{x=x2} - T\left[\frac{ds}{dx}\right]_{x=x1} \qquad \text{(II.3)}$$

Nous pouvons appliquer maintenant la seconde loi de Newton. La force dans la direction y donnée par (II.3), doit être égale au produit de la masse du segment par l'accélération de celui-ci. Donc :

$$\Delta M \frac{d^2s}{dt^2} = F_Y = T\,[f(x_2) - f(x_1)] \quad \text{avec } f(x) = ds/dx \qquad \text{(II.4)}$$

et si on utilise (II.1) on pourra ecrire :

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T\,\frac{f(x_2)\ -\ f(x_1)}{\Delta x} \qquad \text{(II.5)}$$

Si maintenant, on prend la limite $\Delta x \to 0$ dans le second membre de (II.5), on aura

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T\,\frac{d^2s}{dx^2} \qquad \text{(II.6)}$$

puisque :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2)\ -\ f(x_1)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \frac{d^2s}{dx^2} \qquad \text{(II.7)}$$

Si on compare (II.6) et (I.10), on remarque que (II.6) est une equation d'ondes, avec pour vitesse:

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\,p} \qquad \text{(II.8)}$$

**Réponse attendue**

Le fait de considerer un segment de corde de longueur $\Delta x$ et d'effectuer un passage a la limite $\Delta x \to 0$ laisse a penser, de prime abord, que l'equation d'onde est etablie de façon rigoureuse.

Notons d'abord que le segment de corde de longueur $\Delta x$ est qualifie de "tres court", ce qui n'est pas necessaire lorsqu'on fait ensuite le passage a la limite $\Delta x \to 0$

D'autre part, le passage a la limite $\Delta x \to 0$ conduisant de l'equation (II.5)

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (II.5)$$

a l'equation (II.6)

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{d^2s}{dx^2} \qquad (II.6)$$

n'est effectue que dans le second membre de (II.5). L'ecriture du premier membre de (II.5) sous la forme $\mu \frac{d^2s}{dt^2}$ implique non seulement le passage a la limite $\Delta t \to 0$ mais aussi le passage à la limite deja effectue $\Delta x \to 0$ puisque c'est le déplacement s du point de la corde d'abscisse x qui y figure.

Le passage à la limite $\Delta x \to 0$, dans cet exemple, ne peut etre considere comme un critere de rigueur pour l'établissement de l'équation d'onde (II.6).

On peut pourtant ameliorer la rigueur de la demonstration sans pour autant trop alourdir le raisonnement, en dissociant les deux membres de la relation (II.4) qui traduit la seconde loi de Newton.

Pour un segment de corde de longueur $\Delta x$, la somme des forces appliquées est selon la composante y:

$\Sigma F = T\,[\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1] = T\,[f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x]$

où $\varepsilon(\Delta x)$ tend vers 0 avec $\Delta x$

La différentielle de la fonction $x \to \Sigma F(x_1,x)$ est donc la partie linéaire de l'expression ci-dessus soit

$dF = T\,f'(x)\,dx$

ou $dF = T\frac{d^2s}{dx^2}.dx$

Par ailleurs , pour un milieu continu, l'expression de la loi fondamentale de la dynamique est différentielle :

$$dF = \mu \, dx. \frac{d^2s}{dt^2}$$

En identifiant ces deux expressions de la différentielle dF, on obtient l'égalité : $\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{d^2s}{dx^2}$

# IV Aspect fonctionnel des différentielles

Cette derniere rubrique vise l'aspect fonctionnel des differentielles, c'est a dire ce qui distingue une fonction (de l'accroissement de la variable, quelqu'il soit) d'une valeur (d'un "petit" accroissement de quelque chose). On pourra consulter à ce sujet l'annexe (p2).

C'est tout particulierement un usage des differentielles commun chez les physiciens dont on evalue ici l'impact et donc on suscite la critique. L'encadre qui suit recapitule des commentaires frequemment rencontres chez les etudiants de physique de premier cycle universitaire ou de classe preparatoire a propos du statut de l'element differentiel. On y observe deux tendances extrêmes et opposées :

* Celle qui consiste à voir en "dx" un simple marqueur de la variable d'integration (d'ailleurs parfois omis en mathematique : $\Phi = \int f$), d'où les qualificatifs "abstrait", "immateriel", "irreel", etc...

* Celle qui attribue au contraire un contenu quasi materiel a "l'element differentiel" : "un petit morceau dl du fil" susceptible de reconstituer par "recollement", "empilement" etc... l'objet complet auquel on s'intéresse.

Enfin, une troisième tendance compatible avec chacune des deux précédentes, consistant en évocations rituelles :

"dz, c'est la limite de $\Delta z$ quand $\Delta z$ tend vers zero" etc...

**dx,dl...**

* immateriel,.marqueur de la variable d'integration:

-je ne vois aucune necessite de representation dans l'integration

-dx est irréel

-dx est immatériel, abstrait, purement conceptuel

-la longueur dl est fictive

-en fait ça n'a aucune importance, quand on integre dl devient une variable d'integration.

* petit bout de .:

- dl est une petite longueur

- dl est un petit bout de fil

- un petit morceau dl du fil

- on couvre tous les dz possibles donc toutes les parties subdivisées de la sphere.

* Non caracterise, rituel

- dz c'est la limite de $\Delta z$ quand $\Delta z$ tend vers 0

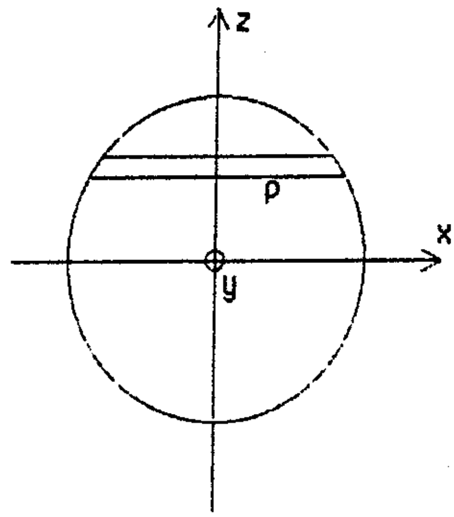
- variation elementaire, element infiniment petit

## QUESTIONNAIRE Q 16

### LIRE LE TEXTE SUIVANT

On se propose de calculer le volume d'une sphère de rayon R.

A cet effet on découpe celle-ci en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphère (plan xOy, cf schéma ci-joint) et d'épaisseur dz petite




Le volume d'une tranche d'altitude z est
$dV = \pi.\rho^2.dz = \pi\,(R^2 - z^2).\,dz$

Donc le volume total est
$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2-z^2)dz$$

### QUESTION SUR CE TEXTE

Q1 - Dans ce calcul on a considéré une tranche élémentaire à l'altitude z sans préciser la valeur de z. Est-ce légitime ? (justifier votre réponse)

Q2 - Aurait-on pu prendre une tranche d'altitude nulle ($z = 0$), écrire $dV = \pi.R^2.dz$ ,

puis $V = \int_{-R}^{+R} \pi R^2 dz$ (justifiez votre réponse)

Q3 - Cette dernière intégrale peut-elle représenter un volume et si OUI lequel?

**Réponse attendue**

Le raccourci typiquement physicien : "le volume d'une tranche... est $dV = \pi.\rho^2.dz$" n'est pas visé ici. Voir a ce sujet le questionnaire 7.

Il s'agit simplement de comprendre que cette relation différentielle est valable sur tout le domaine d'intégration, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour la validité de l'intégration.

La relation $dV = \pi.R^2\, dz$, qui n'est valable que pour le plan horizontal équatorial, ne remplit évidemment pas cette condition. En revanche, dans le cas d'un cylindre, cette relation reste valable pour toute valeur de z et permet donc, par intégration, d'en retrouver le volume.

**Réponses fréquemment observées** chez des etudiants de 1ere annee de DEUG (effectif faible : N = 26)

*question : "est-ce légitime ?"

-15 % seulement des réponses sont nettement correctes :

"oui, parce que la relation est valable quelque soit z"

-46 % disent simplement :

"oui, parce que z est variable de -R à +R"

-Un marais de justifications plus ou moins claires constitue le reste des réponses OUI (20 %)

"on couvre tous les dz possibles donc toutes les parties subdivisees de la sphère

"on fait varier z de -R à +R, on n'a donc aucun besoin de z"

"la valeur de z n'a aucune importance puisque l'on retrouve le symetrique par rapport a z = 0"

"car quelque soit l'altitude $z \neq 0$, on aura toujours un volume".

"cette erreur que l'on fait dans la partie supérieure est amortie progressivement puis supprimée dans la moitié inférieure. Donc c'est légitime pour le volume total".

On note parmi les reponses NON (19 %) ces reponses curieuses

"car $z = 0$ n'est pas acceptable"

"z ne peut prendre la valeur nulle car on aurait la surface d'un cercle"

* Question : aurait-on pu prendre...?

La réponse majoritaire (73 %) est NON, mais seulement un élève sur trois (de l'effectif total) la justifie correctement. On observe en revanche une abondance surprenante (ici 40 %) d'argumentations du type "tranche plate"

"Pour $z = 0$ on a une aire et non un volume"

"Le volume est nul pour une tranche plate"

"Non on ne peut pas le faire, en effet on prend dans ce cas la $z$ = une constante, d'où le résultat de l'intégration serait $V = \pi R^2$ On obtient donc une surface et non un volume"

"Non, à l'altitude $z = o$, on a un cercle d'aire $\pi R^2$"

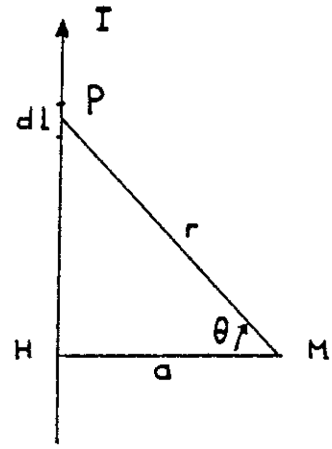
*Question: cette derniere integrale peut-elle representer un volume...?:

Non proposée dans l'enquête initiale.

## QUESTIONNAIRE Q 17

On se propose de calculer l'induction magnétique créée en un point M par un fil infini rectiligne parcouru par un courant I, situé à la distance a de M.

Un élément de circuit dl de point moyen P cree en M une induction $\vec{dB}$.




L'addition vectorielle dans ce cas simple conduit à faire simplement une addition algébrique, avec :

$$dB = \frac{\mu_0 \; I \; dl \; \cos\theta}{4\pi R^2}$$

**QUESTIONS**

Q1 -dB peut-il être considéré comme une différentielle de fonction ? Si oui, de quelles variables ?

Q2 -même question pour dl

Q3 -Exprimer dB à l'aide d'une seule variable

**Réponse attendue**

Question 1 : dB... differentielle ?...

OUI, dB peut être considérée comme la différentielle d'une fonction, que ce soit B (l) ou B (θ) ou B (r), la variable envisagée dans chaque cas (respectivement l, θ ou r)[*] déterminant les bornes d'intégration dans l'integrale correspondante

$$B(l) = \int_{l_0}^{l} dB(dl)^{**} \qquad \text{ou } B(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} dB(d\theta)^{**} \qquad \text{ou } B(r) = \int_{a}^{r} dB(dl)^{**}$$

Les physiciens peuvent bien debattre du sens physique de telles intégrales, cela n'affecte nullement la légitimité de les définir.

Accepter de parler de relations différentielles, s'en servir pour des changements de variables, c'est aussi accepter l'existence de dérivées pour des fonctions qu'il faut bien définir !

Question 2 : dl... différentielle ?

OUI, dans la même logique, dl peut être considerée comme différentielle des fonctions l (l), l (θ), l (r).

Question 3 : En choisissant par commodité la variable θ (et l'origine de l en H on a : $l = a \operatorname{tg} \theta$, $dl = \dfrac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$ et puisque $r = \dfrac{a}{\cos \theta}$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta \; d\theta$$

**Réponses fréquemment observées** :

Les reponses observees chez des eleves de mathematiques speciales (N = 44) montrent que l'on peut très bien "intégrer", "sommer" des "dB" sans pour autant considérer dB comme une différentielle de fonction :

| N = 44 Math.Spé. | OUI | NON | Sans réponse |
|---|---|---|---|
| dB différentielle? | 52 % | 27% | 21% |
| dl différentielle? | 32% | 27% | 41% |

[1*] Precisées le cas échéant par une origine et une orientation

30 % des élèves font l'erreur classique consistant à écrire $dl = r\ d\theta$..
Chez ceux là abondent les commentaires qui dénient au moins à l'un des éléments dB, dl le statut de différientielle :

"Pour intégrer il ne faut surtout pas penser ce que represente dl mais proceder mecaniquement, sinon on est cuit"

"dB n'est pas la différentielle d'une fonction, pas plus que dl"

"Non B n'est pas une fonction mais une quantité constante pour des valeurs fixes de a, I . L'ecriture dB n'est justifiée pour moi que parce qu'elle représente l'induction magnétique au point M créée par une longueur élémentaire de fil".

"dl ne represente pas un nombre, c'est une variation elementaire qui représente la même chose tout le long du fil. Ceci est inhérent à la notion d'intégrale. Dans le cas du fil infini, B ne dépend que de la distante du point au fil. Donc B est fonction de a. Si le fil n'était pas infini, alors B serait fonction de $\theta$ aussi.

dl n'est pas la différentielle d'une fonction mais une variation élémentaire".

"On a $dl = r\ d\theta$ mais ce n'est pas une différentielle".

"Je ne considère pas dB comme une différentielle au sens mathematique".

Chez ceux qui ecrivent correctement $dl = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$ (3 sur 44 ! ), on trouve au contraire des specifications fonctionnelles tres nettes :

"dB est une différentielle de fonction : fonction de $\theta$ ,
dl est une differentielle de fonction : fonction de $\theta$ "

# ANNEXE

L'outil différentiel est utilisé au début des études universitaires, en mathématiques et en physique, essentiellement comme outil d'approximation locale :

- soit au niveau purement local (petites variations autour d'une situation donnée) : étude des fonctions de plusieurs variables et des variétés associées (courbes, surfaces), calcul d'incertitude,

- soit pour le passage du local au global : mise en équations de problèmes non linéaires aboutissant à des équations différentielles ou des intégrales.

C'est dans ce contexte que nous nous sommes situés dans cette brochure. Nous n'avons pas en particulier évoqué la notion de forme différentielle qui, introduite ultérieurement, amène à repenser la notion de différentielle et les liens entre calcul différentiel et intégration.

## I - LE NIVEAU LOCAL

### I1 - LE MODELE LINEAIRE

Le problème général est le suivant : on se donne une fonction f ; connaissant sa valeur en un point M, que peut-on dire de sa valeur en un point M', si M' est "suffisamment voisin" de M (de façon générale, f désignera ici une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, M un point de $\mathbf{R}^n$, MM' la distance euclidienne des points M et M' ou toute autre distance équivalente)?

- <u>La continuité de f en M</u> permet une première approximation (ordre 0) puisqu'alors on a, au voisinage de M :

$$\boxed{f(M') = f(M) + \varepsilon(M,M')} \quad (1)$$

avec $\varepsilon(M,M')$ tendant vers 0 quand MM' tend vers 0.

En d'autres termes, en première approximation, on peut considérer la fonction f comme constante au voisinage de M.

- <u>La différentiabilité de f en M</u> permet d'améliorer cette approximation (ordre 1) : on peut alors approcher f au voisinage de M par une fonction affine g avec la garantie que l'écart entre f(M') et g(M') sera non seulement petit avec MM', mais négligeable par rapport à MM'.

En effet si f est différentiable en M, on a au voisinage de M :

$$\boxed{f(M') = g(M') + \varepsilon(M,M').MM'} \quad (2)$$

avec g affine et $\varepsilon(M,M')$ tendant vers 0 quand MM' tend vers 0,

autrement dit :

$$\boxed{f(M') = f(M) + L(\vec{MM'}) + \varepsilon(M,M').MM'} \quad (3)$$

avec L application linéaire et toujours les mêmes condition sur $\varepsilon(M,M')$.

L'application affine g est l'approximation au premier ordre de f en M, l'application linéaire L associée à g est la différentielle de f en M, notée en général $df_M$. Elle est déterminée de façon <u>unique</u> par la relation (3).

Par exemple :

- si f est une fonction de **R** dans **R**, elle est différentiable en x si et seulement si elle est dérivable en ce point et on a alors, pour h suffisamment petit :

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \varepsilon(h).h \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

La différentielle $df_x$ n'est autre que l'application linéaire de **R** dans **R** qui au réel h associe le réel $f'(x).h$. Elle est définie sur **R** tout entier mais bien sûr, ne présente un intérêt pour l'approximation de f que pour h petit (sauf si f est déjà affine).

Lorsque f est une application linéaire, elle est sa propre différentielle en tout point. C'est en particulier le cas pour l'application identique : sa différentielle, notée dx, est l'application identique de **R** dans **R**.
Il s'ensuit que $df_x$ étant l'application :

$$h \to f'(x).h$$

on a l'égalité fonctionnelle : $df_x = f'(x)dx$.
Présenter dx comme un accroissement arbitraire de la variable comme cela est souvent fait, en particulier en physique, revient à s'autoriser l'abus fréquent qui consiste à confondre une fonction et sa valeur. Et si, souvent, on rajoute que cet accroissement doit être petit, ce n'est pas parce que la différentielle n'est définie que pour des accroissements petits (c'est une application définie sur **R** tout entier), c'est parce que l'approximation différentielle ne présente d'intérêt, comme nous l'avons déjà écrit, que localement
Mais il est important que cette confusion entre fonction et valeur n'interdise pas à dx de retrouver, lorsque cela est nécessaire, pleinement son statut de fonction, par exemple dans les problèmes de changement de variables.

- si f est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, différentiable en M, on montre de même que la différentielle $df_M$ s'exprime à partir des dérivées partielles de f en M (qui alors existent nécessairement) :

$$\boxed{df_M(h_1,\ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}.h_i}$$

autrement dit :

$$\boxed{f(M') = f(M) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(M)(x_i(M')-x_i(M)) + \varepsilon(M,M').MM'}$$

avec toujours la même condition sur $\varepsilon(M,M')$.

L'effet de l'application linéaire $df_M$ sur le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ s'interprète donc comme le produit scalaire de ce vecteur par un vecteur $\vec{V}$ dont les composantes sont les dérivées partielles de f au point considéré.

Ce vecteur $\vec{V}$, déterminé de manière unique par la relation (4) ci-après :

$$\boxed{f(M') = f(M) + \overrightarrow{MM'}\cdot\vec{V} + \varepsilon(M,M').MM'} \quad (4)$$

avec toujours la même condition sur $\varepsilon(M,M')$,
fournit la direction dans laquelle la fonction f s'accroît le plus au voisinage de M. C'est le gradient de f au point M noté : $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}f_M$.

- si f est plus généralement une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, différentiable en M, sa différentielle en M sera une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ codée dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^n$ et de $\mathbf{R}^p$ par sa matrice : la matrice jacobienne ou matrice des dérivées partielles.

- Geometriquement, le point de vue différentiel tel qu'il est presente ci-dessus conduit en dimension 1 a une conception de la tangente qui n'est pas la conception classique : tangente en M comme position limite des sécantes passant par M, mais plutôt la suivante :

- la tangente en M à la courbe **C** associée à f est la droite qui approche le mieux localement **C**, plus précisément, c'est la seule droite qui approche **C** au premier ordre au voisinage de M,
ou encore :

- la tangente en M a la courbe **C** est la droite avec laquelle tend à se confondre la courbe **C** lorsque l'on agrandit par zooms successifs un voisinage de M.

## I2 - LE CONTROLE DE L'APPROXIMATION

Les définitions données dans le paragraphe I1 le sont sous forme d'égalité asymptotiques. Elles ne permettent pas d'obtenir directement encadrements ou majorations.

Lorsque l'on écrit :

$$f(M') = f(M) + df_M(\vec{MM'}) + \varepsilon(M,M').MM' \text{ avec } \lim_{MM'\to 0} \varepsilon(M,M') = 0$$

on ne fournit pas de réponse au problème suivant :

*Comment choisir r pour que sur la boule B(M,r) de centre M et de rayon r, f(M') soit évalué par f(M) + $df_M(\vec{MM'})$ à telle ou telle précision donnée ?*

La réponse à ce problème passe par un meilleur contrôle du "reste" : $\varepsilon(M,M').MM'$

Des hypotèses plus contraignantes sur f peuvent fournir ce contrôle. C'est par exemple le cas, en dimension 1, si la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle [x-a, x+a] et si sa dérivée seconde est majorée en valeur absolue par A sur cet intervalle. En effet, la formule de Taylor permet alors d'écrire, dès que x + h est dans [x-a, x+a] :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \frac{h^2}{2}f''(c) \quad \text{avec c compris entre x et x+h}$$

donc d'obtenir la majoration :

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x).h| \leq \frac{h^2}{2} A$$

Pour garantir une précision $\alpha$, il suffit alors de choisir pour r :

$$r = \inf\left(a, \sqrt{\frac{2\alpha}{A}}\right)$$

Pourtant, en ce qui concerne le calcul d'incertitude, les formules classiques, par exemple la formule $\Delta uv = u\Delta v + v\Delta u$ sont souvent perçues comme une simple traduction des enoncés du calcul différentiel à l'ordre 1. Qu'en est-il exactement ?

Prenons, pour simplifier l'écriture, une fonction f réelle de deux variables différentiable en $(x_0,y_0)$. Le problème est le suivant :
*$\Delta z$ étant un ordre de grandeur d'erreur donné, peut-on déterminer $\Delta x$ et $\Delta y$ pour que lorsque x varie dans l'intervalle $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x]$ et y varie dans l'intervalle $[y_0-\Delta y, y_0+\Delta y]$, on puisse garantir que la valeur z = f(x,y) restera dans l'intervalle $[z_0-\Delta z, z_0+\Delta z]$ ?*

*Et en sens inverse, étant donnés $\Delta x$ et $\Delta y$, peut-on apprécier $\Delta z$ ?*

L'hypothèse de différentiabilité permet d'écrire :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0).(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0).(y-y_0) + M_0M.\varepsilon(M_0,M) \quad (5)$$

avec :
$M_0 = (x_0,y_0)$, $M = (x,y)$ et $\varepsilon(M_0,M)$ tendant vers 0 quand M tend vers $M_0$.

Posons : $\alpha_0 = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)$ et $\beta_0 = \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)$

Les formules usuelles du calcul d'incertitude consistent a glisser de la relation (5) à :

$$\Delta z = |\alpha_0|\Delta x + |\beta_0|\Delta y \quad (6)$$

avec intuitivement l'idée que, dans ce glissement, on a majoré l'écart possible entre $f(x,y)$ et $f(x_0,y_0)$ sur l'ensemble considéré et que l'on a, en fait, pour tout $(x,y)$ dans $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x].[y_0-\Delta y, y_0+\Delta y]$ :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |\alpha_0|\Delta x + |\beta_0|\Delta y$$

(cf. les réponses au questionnaire).

En fait, ce n'est pas vrai, même pour une fonction aussi simple que le produit.
En effet, dans ce cas particulier, la formule (6) devient :

$$\Delta(xy) = |y_0|\Delta x + |x_0|\Delta y$$

Or, pour $(x_0,y_0) = (1,1)$ et $(x,y) = (1.01, 1.01)$ on a :

$$xy - x_0y_0 = 0.0201$$

alors que la formule (6) avec $\Delta x=0.01$ et $\Delta y=0.01$ donne pour $\Delta(xy)$ la valeur strictement inférieure 0.02.
Et, aussi petits soient-ils, des écarts positifs sur x et y conduisent à la même contradiction.

La formule (6) ne peut donc pas être interpretée comme fournissant une majoration des écarts $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|$. Mais, elle est quand même precieuse car elle fournit une approximation de "bonne qualite" de la borne superieure de ces ecarts (par exemple dans le cas particulier traite : 0.02 au lieu de 0.0201, soit une estimation a $10^{-4}$ pres, pour des incertitudes sur $x_0$ et $y_0$ de $10^{-2}$).

En effet, de la formule (5) on déduit :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |\alpha_0|\Delta x + |\beta_0|\Delta y + |\varepsilon(M_0,M)|.M_0M$$

et par conséquent :

$$\Delta z \leq |\alpha_0|\Delta x + |\beta_0|\Delta y + \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.\ |\varepsilon(M_0,M)|$$
avec $\lim \varepsilon(M_0,M) = 0$ quand $M_0M$ tend vers 0.

Ceci signifie qu'en prenant $|\alpha_0|\Delta x + |\beta_0|\Delta y$ comme estimation de $\Delta z$, on peut avoir certes une estimation trop faible, mais que l'erreur commise sera d'ordre supérieur à celui de $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

En d'autres termes, l'erreur sur l'erreur est négligeable devant l'erreur.

## I3 - INVERSION LOCALE ET THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

Bien que cette question soit peu abordée dans les questionnaires, nous voudrions pour terminer cette partie évoquer ces théorèmes clefs du calcul différentiel que constituent le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites, car ils illustrent particulièrement bien le contrôle sur les objets apporté par l'approximation linéaire.

Soit f une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, continûment différentiable au voisinage du point $M_0$. Le theoreme d'inversion locale garantit que si $df_{M_0}$ est une application linéaire inversible (donc si le jacobien est non nul) alors f est, elle aussi, inversible sur un voisinage convenable de $M_0$.
De plus, l'application inverse est, elle aussi, différentiable et sa différentielle n'est autre que l'inverse de la différentielle de f.

Le théoreme des fonctions implicites, qui s'en deduit facilement, permet de repondre a la question suivante :
*Soit f une application de $R^n$ dans $R^p$ ($p<n$) ; on suppose que $f(M) = k$. Que peut-on dire de la ligne de niveau k de f au voisinage de M ?*

Considérons pour simplifier une fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ (les questionnaires proposent un exemple correspondant à une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$) et $(x_0,y_0)$ un point satisfaisant $f(x_0,y_0)=k$.
Quelle est au voisinage de ce point, l'allure de la ligne de niveau k de f ? Peut-on l'exprimer comme une fonction de x, de y ? Peut-on connaître sa tangente?

Si f est continûment différentiable dans un voisinage de $(x_0,y_0)$, le théorème des fonctions implicites affirme que, là encore, les propriétés "passent" de l'approximation affine à la fonction, plus précisément que si l'équation :

$$\boxed{f(x_0,y_0) + \alpha_0(x-x_0) + \beta_0(y-y_0) = k} \quad (9)$$

(linéarisée de l'équation $f(x,y)=k$) peut se résoudre en fonction de $x$ ($\beta_0 \neq 0$), localement, la ligne de niveau pourra s'exprimer elle aussi comme une fonction $\varphi$ de $x$ et que l'équation (9) sera justement celle de la tangente à la ligne de niveau en $(x_0,y_0)$.

En d'autres termes, on aura, au voisinage de $x_0$ :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) - \frac{\alpha_0}{\beta_0}(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x_0,x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x_0,x) = 0$$

La situation est analogue, en echangeant les rôles de $x$ et $y$, si $\alpha_0 \neq 0$.

## II- LE PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL

Ce passage va se poser dans l'étude de phénomènes non linéaires et aboutira à l'écriture d'une équation différentielle ou directement d'une intégrale.

Dans certains cas, il permettra d'étendre la définition d'un concept et en deviendra par là-même un element constitutif, le cas particulier connu étant exploité comme modèle d'approximation locale du cas général.
C'est ce qui se produit par exemple lors de l'extension du concept de travail d'une force du cas où la force est constante et le chemin rectiligne au cas d'une force non constante sur un chemin non rectiligne.

Deux points de vue sont souvent possibles :

### II1 - LE POINT DE VUE DIFFERENTIEL

Il consiste à traduire les informations sur la situation, localement, par une égalité pouvant s'interpréter comme une approximation au premier ordre et à passer au global par "intégration" de la relation différentielle associée.

Par exemple, ayant a determiner la relation liant deux grandeurs $x$ et $y$, on cherchera s'il est possible de modéliser les informations données (pour des valeurs de $x$ et $y$, dans un certain domaine et des accroissements $\Delta x$ et $\Delta y$ de ces grandeurs suffisamment petits), par une relation d'une des deux formes suivantes :

$$\boxed{\Delta y = \alpha(x,y)\Delta x + \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y)\Delta x \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0} \quad (10)$$

ou

$$\boxed{\Delta x = \beta(x,y)\Delta y + \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y)\Delta y \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon = 0} \quad (11)$$

Remarque 1 : notons à ce propos qu'en mathématiques, il n'y a aucune difficulté à comparer les ordres de grandeurs de $\Delta x$, $\Delta y$ et $\epsilon$, les fonctions n'ayant pas de dimension. En physique, en revanche, il peut y avoir là un obstacle : si y designe une masse et x un temps, on ne pourra effectuer la comparaison qu'en considérant $l.\Delta x$, l désignant par exemple ici 1g/s.

Dans le premier cas, la lecture de (10) comme écriture d'approximation au premier ordre conduira à chercher comme solution globale une fonction $\Psi$ de la variable x solution de l'équation différentielle :

$$y' = \alpha(x,y)$$

c'est à dire satisfaisant sur un intervalle approprié :

$$\Psi'(x) = \alpha(x, \Psi(x))$$

Dans le second cas, on cherchera de manière analogue comme solution globale une fonction $\Gamma$ de la variable y, solution de l'équation différentielle :

$$x' = \beta(x,y)$$

c'est à dire, satisfaisant sur une intervalle approprié :

$$\Gamma'(y) = \beta(\Gamma(y), y)$$

Remarque 2 : C'est cette lecture differentielle qui est implicitement suggeree par certaines formulations "physiciennes", par exemple : *"L'absorption d'intensité par une tranche élémentaire est proportionnelle à l'épaisseur de la tranche et à l'intensité traversant la tranche"*
L'indicateur "élémentaire" est là pour signifier qu'il ne faut pas interpréter l'égalité annoncée au pied de la lettre mais comme une égalité au premier ordre près ou une égalité différentielle.

Remarque 3 : Lorsque l'expression $\alpha(x,y)$ ne dépend pas de y (respectivement $\beta(x,y)$ ne dépend pas de x), la mise en équation conduit directement à un calcul de primitive, puisque l'on arrive à :
$\Psi'(x) = \alpha(x)$ (respectivement $\Gamma'(y) = \beta(y)$)

Nous presenterons pour terminer ce paragraphe une méthode souvent employée pour obtenir la relation cherchée entre $\Delta x$, $\Delta y$, x et y, basée sur la continuité d'une fonction auxiliaire (cf. aussi les questionnaires).
On cherche a determiner y comme fonction de x. Notons f cette fonction inconnue.

Si l'on sait que, sur un certain domaine :

$$\boxed{g_m(x,\Delta x)\Delta x \leq f(x+\Delta x)-f(x) \leq g_M(x,\Delta x).\ \Delta x} \quad (12)$$

$g$ étant une fonction continue sur le domaine, $g_m$ et $g_M$ désignant respectivement l'inf et le sup de cette fonction sur le segment $[x, x+\Delta x]$, alors on peut :

- soit, en utilisant la continuité de g, écrire directement :

$$f(x+\Delta x) - f(x) = [g(x) + \varepsilon(x,\Delta x)]\Delta x \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x,\Delta x) = 0$$

ce qui prouve que f est derivable en x, de derivee g(x),

- soit, en divisant (12) par $\Delta x$ arriver a :

$$g_m(x,\Delta x) \le \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \le g_M(x,\Delta x)$$

et faire tendre $\Delta x$ vers 0. g étant continue, $g_m$ et $g_M$ tendent alors simultanément vers g(x) et donc f est dérivable en x, de dérivée g(x).

L'interêt de ce point de vue differentiel est de permettre d'effectuer le contrôle de la mise en equation au niveau strictement <u>local</u>. Ce n'est pas le cas pour le point de vue intégral que nous allons presenter maintenant.

## II - LE POINT DE VUE INTEGRAL

On se place dans la situation suivante :

On cherche a évaluer une grandeur E (masse, aire, volume, force...). E depend des valeurs prises par une fonction f de la variable x, x variant dans une partie $\Omega$ mesurable de la droite, du plan ou de l'espace..., de mesure $m(\Omega)$.

On sait calculer E lorsque la fonction f est constante sur $\Omega$ : si f est egale à k sur $\Omega$, $E(\Omega) = km(\Omega)$, on a affaire à un problème linéaire.
<u>exemple</u> : masse d'un corps de masse volumique homogène, volume d'un solide de section horizontale constante....

Mais le problème a traiter ne rentre pas dans ce registre ou l'objet du problème est justement de généraliser la définition de E à une classe plus large de fonctions.

On sait alors que la réalisation des trois conditions suivantes suffit à légitimer la procédure intégrale c'est à dire le passage du local au global par intégration :

<u>condition 1</u> - Pour des partitions finies $(\Omega_i)$ de $\Omega$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 .... \cup \Omega$, de calibre arbitrairement petit, le resultat global est la somme des contributions de chaque partie :

$$\boxed{E(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} E(\Omega_i)}$$

(principe du decoupage en tranches)

Condition 2 - Sur chaque partie $\Omega_i$ on a l'encadrement suivant, en notant $m(\Omega_i)$ la mesure de $\Omega_i$ :

$$\boxed{m_i.m(\Omega_i) \leq E(\Omega_i) \leq M_i.m(\Omega_i)} \quad (13)$$

avec $m_i = \inf\limits_{\Omega_i} f$ et $M_i = \sup\limits_{\Omega_i} f$

Condition 3 - f est intégrable Riemann sur $\Omega$.

En effet, si la fonction f est intégrable Riemann, les deux quantités :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i.m(\Omega_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i.m(\Omega_i)$$

convergent, lorsque l'on raffine la subdivision de $\Omega$ et que le sup des diamètres des $\Omega_i$ (diamètre d'une sphère minimale contenant $\Omega_i$) tend vers 0, vers le même nombre qui n'est autre que l'intégrale de la fonction f sur $\Omega$.

De l'encadrement :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i.m(\Omega_i) \leq E(\Omega) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i.m(\Omega_i)$$

obtenu en utilisant les conditions1 et 2, on deduit alors que necessairement:

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} f(x)dx$$

Remarque 1 : on a raisonné ici en supposant l'existence de $E(\Omega)$. Si le problème posé est celui de l'extension de la définition de E, le processus intégrale conduit à élargir la définition de E à la classe des fonctions f integrables Riemann sur $\Omega$ en posant :

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} f(x)dx$$

Notons que les fonctions utilisées en physique élémentaire sont toutes intégrables Riemann sur les ensembles de mesure finie $\Omega$ considérés parce que par exemple bornées et monotones, ou bornées et continues par morceaux.

Remarque 2 : Très souvent la fonction f n'apparait pas de façon manifeste dès le début de la mise en équation (cf.exemple ci-après). Elle ne s'impose réellement que lorsque l'on cherche a realiser l'encadrement de $E(\Omega)$ qui correspond à la condition 2.

Remarque 3 : Souvent aussi, même si une fonction s'impose, l'encadrement obtenu ne sera pas exactement de la forme (13) mais plutôt de la forme :

$$m(\Omega_i)[\inf_{\Omega_i} f - e'_i] \leq E(\Omega_i) \leq m(\Omega_i)[\sup_{\Omega_i} f + e_i]$$

avec $e_i$ et $e'_i$ petits avec $d(\Omega_i)$, le diamètre de $\Omega_i$.

On montre alors que pour que la procédure intégrale soit encore justifiée, il suffit que les $e_i$ et $e'_i$ tendent vers 0 avec le $\sup_i d(\Omega_i)$ uniformement, ou encore que l'on puisse écrire :

$$m(\Omega_i)[\inf_{\Omega_i} f - e] \leq E(\Omega_i) \leq m(\Omega_i)[\sup_{\Omega_i} f + e]$$

avec $e$ tendant vers 0 quand le $\sup_i d(\Omega_i)$ tend vers 0.

Le point de vue integral qui vient d'être presente necessite a l'inverse du point de vue différentiel, un contrôle global de la situation, en principe plus coûteux.
Pourtant, dans bon nombre de problèmes, le cadre de la mesure est le cadre naturel et le passage au point de vue différentiel oblige à un changement de point de vue : il s'agit en fait de passer d'une conception de l'intégrale en termes de mesure à une conception de l'intégrale en termes de primitive.
Ce changement s'observe tres frequemment dans les manuels des qu'il y a effort de légitimation. L'exemple du calcul du volume de la sphère par encadrement, présenté dans les questionnaires, en est un exemple typique.

Dans ce paragraphe, nous avons cherché à formuler des conditions de contrôle de la procédure intégrale avec l'idée qu'une meilleure opérationalisation de ce contrôle permettrait dans certaines mises en equation de concilier un coût de légitimation raisonnable avec le respect du cadre naturel de la mesure.

Reprenons par exemple le calcul du volume de la sphère :
La justification de type différentiel se base sur l'encadrement suivant associé au découpage en tranches (cf. questionnaires) :

$$\text{Min }[S(z)].\,\Delta z \leq \Delta V \leq \text{Max }[S(z)].\,\Delta z$$

Or cet encadrement peut directement s'interpréter d'un point de vue intégral :

Si $\Omega$ est le segment $[-R, R]$ et si f est la fonction définie sur $\Omega$ qui à z, associe l'aire de la section d'altitude z : S(z), l'encadrement fourni est du type réquis par la condition 2.

f étant intégrable puisque continue, on en déduit alors :

$$V = \int_{-R}^{R} S(z)dz$$

Et la démarche se généralise immédiatement à toute surface de révolution bornée pour laquelle la fonction aire associée est intégrable Riemann.

## II3 - DEUX EXEMPLES

Pour terminer cette annexe, nous traiterons deux exemples, en adoptant dans le premier le point de vue intégral et dans le second le point de vue différentiel.

A - <u>la longueur d'un arc de courbe :</u>

Soit **C** une courbe associée à une fonction f à valeurs réelles, définie et continûment différentiable sur un segment [a,b].

La longueur d'une courbe étant définie comme la borne supérieure des longueurs des lignes brisées dont les sommets sont sur la courbe ou, ce qui est équivalent, comme la limite des longueurs des lignes brisées obtenues par subdivisions successives de [a,b], la question est de montrer qu'avec les hypothèses faites, **C** admet une longueur finie et d'en trouver une expression en fonction de f.

- En prenant comme espace de mesure $\Omega = [a,b]$, la définition donnée de la longueur vérifie bien la condition d'additivité.

- Si on découpe [a, b] en n intervalles : $I_1,...I_n$, il correspond à ce découpage une ligne brisée construite sur la courbe. La longueur d'un segment de cette ligne brisée déterminé par les points M d'abscisse x et M' d'abscisse x' est égale à :

$$MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (f(x)-f(x'))^2}$$

Par application du théorème des accroissements finis, il existe un réel c entre x et x' tel que :

$$f(x') - f(x) = (x'-x)\, f'(c)$$

Il s'ensuit que MM' peut s'écrire :

$$MM' = |x-x'|.\sqrt{1+f'(c)^2}$$

et donc que l'on a, en désignant par $L(I_i)$ la longueur du morceau de ligne brisée correspondant à l'intervalle $I_i$, pour chaque i :

$$\inf_{I_i} \sqrt{1+f'(x)^2}.\, m(I_i) \leq L(I_i) \leq \sup_{I_i} \sqrt{1+f'(x)^2}.\, m(I_i)$$

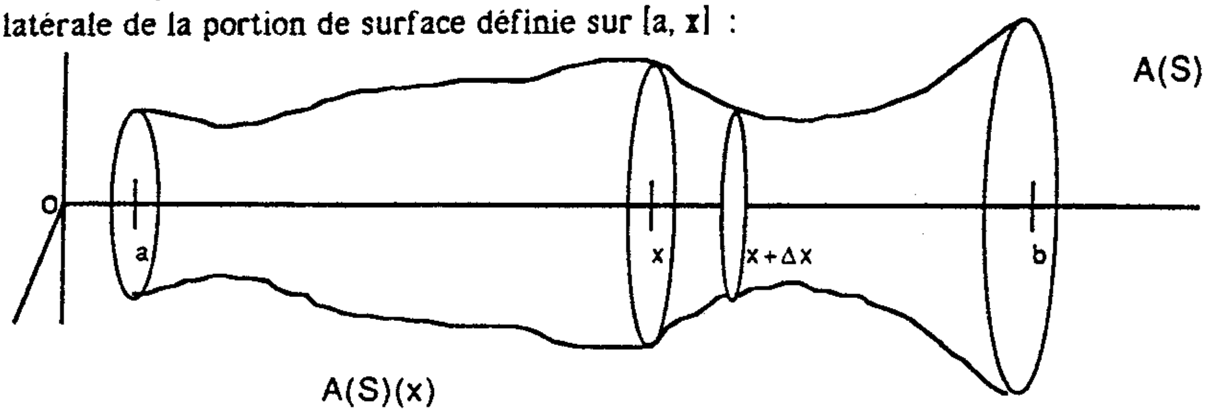
On a donc ici un encadrement du type requis par la condition 2 avec comme fonction sur $\Omega$ : $g = \sqrt{1+f'^2}$ . $f'$ étant continue sur [a, b], g est intégrable sur [a, b] et l'on est assuré que lorsque le pas de la subdivision de [a, b] tend vers 0, la longueur des lignes brisées construites sur la courbe tend vers :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

**C** a donc une longueur finie dont l'expression en fonction de f est fournie par l'intégrale ci-dessus.

B - Laire d'une surface de révolution

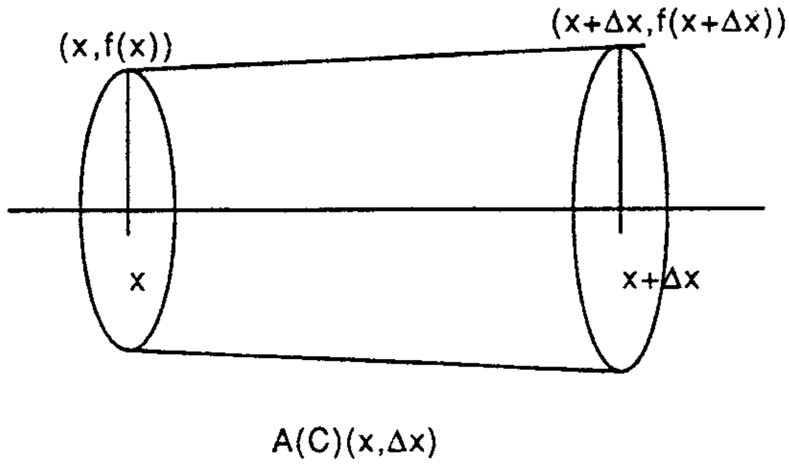
Soit une courbe $\Gamma$ d'équation y=f(x), f étant définie et continuement dérivable sur un intervalle [a, b] et **S** la surface de révolution d'axe Ox et de génératrice $\Gamma$. On note A(S) l'aire latérale de **S** et A(S)(x) l'aire latérale de la portion de surface définie sur [a, x] :




L'aire laterale A(C)(x, Δx) d'un tronc de cône dont les bases sont définies par (x, f(x)) et (x+ Δx, f(x+ Δx)) est donnée par la formule :

$$A(C)(x, \Delta x) = \pi.[f(x) + f(x+\Delta x)].\sqrt{\Delta x^2+\Delta f^2}$$

en notant Δf : f(x+Δx) - f(x).




- f etant continue :

$$f(x) + f(x+\Delta x) = 2f(x) + \varepsilon(x,\Delta x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon=0$$

- f étant dérivable et Δx supposé positif :

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta f^2} = \Delta x.[\sqrt{1+f'(x)^2} + \varepsilon'(x,\Delta x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon=0$$

D'où :

$$A(C)(x, \Delta x) = 2\pi.f(x).\sqrt{1+f'(x)^2}\,\Delta x + \varepsilon(x,\Delta x).\Delta x \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0 \quad (15)$$

Si on définit A(S)(x) comme la fonction, si elle existe, dont la variation est approchée au premier ordre par l'aire du tronc de cône associé, de (15) on déduit immédiatement, f' étant continue sur [a,b], que la fonction aire existe, est dérivable et de dérivée :

$$A'(S)(x) = 2\pi.f(x).\sqrt{1+f'(x)^2}$$

donc que :

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Ce qui est bien la formule classique.

Bien sûr, là encore on aurait pu procéder par encadrement et passer par la procédure intégrale, soit en utilisant des arguments de convexité, soit en admettant que A(S) est comprise entre l'aire du cylindre de rayon minimum et de génératrice L(Γ) et l'aire du cylindre de rayon maximum et de même génératrice.

**Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,**

**Vous pouvez soit :**

**Consulter notre site WEB**

**http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html**

**Demander notre catalogue en écrivant à**


**IREM Université Paris 7**
**Case 7018**
**2 place Jussieu**
**75251 Paris cedex 05**

**TITRE :**

Questionnaire de travail sur les différentielles.

**AUTEUR (S) :**

Michèle ARTIGUE - Jean MENIGAUX – Laurence VIENNOT

**RESUME :**

Cette brochure présente un ensemble de questionnaires élaborés pour une recherche maths/physique sur la notion de différentielle et construits pour faire apparaître clairement certaines difficultés ou simplement certains aspects de la notion peu mis en lumière par l'enseignement usuel. Les questionnaires sont accompagnés de commentaires et de réponses d'étudiants les plus fréquemment observées.

**MOTS CLES :**

Didactique – mathématiques – physique - enseignement supérieur - différentielles

**Université PARIS 7-Denis Diderot**
**Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE**
**Case 7018 - 2 Place Jussieu**
**75251 PARIS Cedex 05**
**Dépôt légal : Mars 1989**
**ISBN : 2-86612-058-4**