

## Aperçu sur la théorie de la portance

Ce texte résume les bases théoriques qui permettent de dégager les lois de la portance ; il complète ainsi le Chapitre 4 du livre à propos du vol des avions. Si la masse volumique de l'air n'est pas uniforme à l'échelle de la troposphère, par contre, à l'échelle d'un véhicule comme un avion, sa variation est tellement faible qu'il est tout à fait justifié de la négliger. Pour ne pas inclure la poussée d'Archimède dans le calcul des efforts, nous négligeons aussi la pesanteur. Par ailleurs, puisque nous ne nous intéressons pas à la traînée de frottement, nous négligeons totalement la viscosité, ce qui permet de supposer irrotationnel l'écoulement autour du corps mobile, de ramener l'équation de Navier-Stokes à l'équation d'Euler et d'utiliser la relation de Bernoulli.

### 1. Efforts sur un obstacle en mouvement uniforme

Soit  $\mathbf{U}$  la vitesse de l'objet par rapport au fluide lointain. Plaçons nous dans un référentiel solide de cet objet, dans lequel le mouvement du fluide peut être supposé permanent. La vitesse relative de l'air s'écrit alors  $\mathbf{V} = -\mathbf{U} + \mathbf{V}_a$ , où  $\mathbf{V}_a$  désigne sa vitesse absolue dans son mouvement provoqué par le passage de l'avion. Les hypothèses faites réduisent la relation de Bernoulli à la forme simple :

$$p + \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} = \text{Cste.} \quad (1)$$

Dans ces conditions, les seules forces qui s'exercent sur le corps proviennent de la pression qui s'exerce sur toute sa surface fermée  $S$ . En désignant par  $\mathbf{n}$  la normale à cette surface dirigée vers l'extérieur, leur résultante s'écrit

$$\mathbf{F} = -\oint_S p \mathbf{n} dS = \oint_S \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} \mathbf{n} dS, \quad (2)$$

où la seconde égalité est tirée de la relation de Bernoulli (1).

Considérons le domaine fluide situé entre la surface du corps mobile ( $S$ ) et une autre surface fermée ( $\Sigma$ ), située à très grande distance du corps comme représenté sur la figure 1.

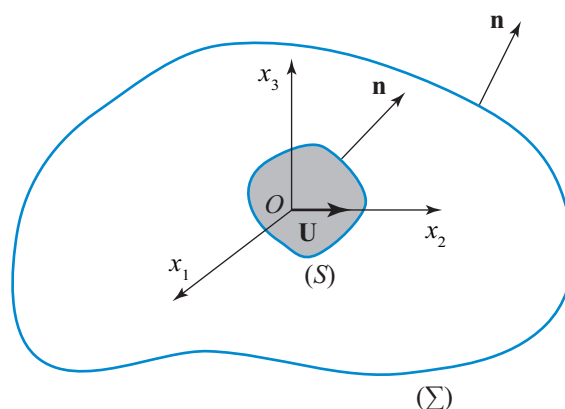


Figure 1. Repère  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$  dans le référentiel entraîné avec l'objet mobile à la vitesse  $\mathbf{U}$  par rapport au fluide lointain. Par la suite, la direction horizontale de  $\mathbf{U}$  sera choisie comme axe des  $x$  et l'axe des  $z$  sera celui de la verticale ascendante.

Appliquons le théorème des quantités de mouvement au domaine situé entre ces surfaces (voir le texte « Loi fondamentale de la mécanique et premières applications », situé dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques »). Suivant ce théorème, la somme des forces extérieures

(premier membre de la relation (3) ci-dessous) est égale au débit de quantité de mouvement sortant (deuxième membre) :

$$\oint_S \rho \mathbf{n} dS - \oint_\Sigma \rho \mathbf{n} d\Sigma = \oint_\Sigma \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma. \quad (3)$$

Combinée avec la relation de Bernoulli, cette relation (3) permet d'écrire la résultante des forces exercées sur le corps mobile sous la forme :

$$\mathbf{F} = \oint_\Sigma \left( \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} \mathbf{n} - \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \right) d\Sigma. \quad (4)$$

Or la définition de la vitesse relative  $\mathbf{V}$  conduit à :

$$\frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{U}^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{U} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{U} (\mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{U} \times (\mathbf{V}_a \times \mathbf{n}) + \frac{\mathbf{V}_a^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{V}_a (\mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}), \quad (5)$$

en utilisant l'identité classique  $\mathbf{U} \times (\mathbf{V}_a \times \mathbf{n}) = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{V}_a - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}_a) \mathbf{n}$ . Substituons maintenant (5) dans l'expression (4) et éliminons les intégrales construites avec  $\mathbf{U}^2$  et  $\mathbf{U} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$ , évidemment nulles puisque  $\mathbf{U}$  est uniforme. On obtient :

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{U} \times \oint_\Sigma (\mathbf{V}_a \times \mathbf{n}) d\Sigma + \rho \oint_\Sigma \left[ \frac{V_a^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{V}_a (\mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}) \right] d\Sigma. \quad (6)$$

Il est remarquable que la résultante des efforts extérieurs apparaisse comme la somme d'une intégrale proportionnelle à la vitesse  $\mathbf{U}$  du corps mobile et dépendant linéairement de la vitesse absolue  $\mathbf{V}_a$ , et d'une autre intégrale indépendante de  $\mathbf{U}$  et dépendante quadratiquement de  $\mathbf{V}_a$ . A trois dimensions, il n'est pas possible de dégager la valeur limite de la seconde lorsque la surface  $\Sigma$  est très éloignée, car l'aire de  $\Sigma$  devient extrêmement grande en même temps que  $\mathbf{V}_a$  devient très petite. Par contre, à deux dimensions, cette limite devient identiquement nulle comme on le montre au paragraphe suivant. Le second membre de (6) se réduit alors à la première intégrale, proportionnelle à  $\mathbf{U}$ .

Plaçons nous dans un système bidimensionnel, où les surfaces fermées  $S$  et  $\Sigma$  sont cylindriques avec leurs génératrices perpendiculaires au plan de la figure 1. Et intéressons nous aux efforts exercés par le fluide sur une tranche de longueur unité du corps mobile. Cet écoulement bidimensionnel, irrotationnel et permanent est descriptible en termes d'un potentiel complexe  $w(z)$ , lequel est une fonction analytique de la variable complexe  $z = x + iy$  dans tout le plan  $(x, y)$ . La vitesse complexe, c'est-à-dire la dérivée  $dw/dz = u - iv$ , permet d'accéder aux deux composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse et ainsi d'évaluer les deux intégrales de la relation (6). A très grande distance du corps en mouvement, centré sur l'origine, la vitesse complexe doit s'annuler et peut se mettre sous la forme d'une série de Laurent :

$$u - iv = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (7)$$

Et sa primitive, le potentiel complexe  $w(z)$ , peut s'écrire :

$$w = a_1 \log z - \frac{a_2}{z} + \dots \quad (8)$$

Il apparaît alors que, à grande distance  $r$  du corps,  $V_a \rightarrow 0$  comme  $r^{-1}$ , tandis que l'aire de  $\Sigma$  croît comme  $r$ . La seconde intégrale de (6), dont la limite doit être proportionnelle à  $V_a^2 \Sigma$  est donc nulle, et seule la première peut avoir une limite finie.

## 2. Théorème de Kutta-Joukovsky

Pour calculer cette première intégrale figurant au second membre de l'expression (6), il suffit de retenir dans (8) la singularité logarithmique, qui en constitue le terme prépondérant. On peut l'écrire

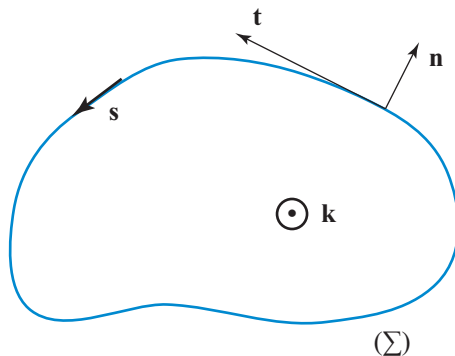
$$w = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \log z, \quad (9)$$

en donnant aux parties réelle et imaginaire de la constante  $a_1$  leur signification physique :  $Q$  désigne le débit qui traverse les deux surfaces fermées  $S$  et  $\Sigma$ , et  $\Gamma$  la circulation de la vitesse autour de chacune d'elles. Puisque nous avons pour objectif de calculer la portance d'une aile, limitée par une surface fermée, le débit  $Q$  doit être considéré comme nul. Dès lors, il est clair que la résultante des forces ne provient que de la circulation de la vitesse autour de cette aile  $\Gamma$ .

Pour exprimer la résultante des forces extérieures, on doit d'abord obtenir la valeur de l'intégrale  $\oint_{\Sigma} (\mathbf{V}_a \times \mathbf{n}) d\Sigma$ , et la figure 2 définit les notations utilisées à cette fin ( $s$  est l'abscisse curviligne sur le contour  $C$  qui limite la surface  $\Sigma$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  sont, respectivement, la normale et la tangente unitaires à ce contour, et  $\mathbf{k}$  est le vecteur unité perpendiculaire au plan de la figure). Les relations écrites en regard de la figure 2 conduisent à la valeur  $\oint_{\Sigma} (\mathbf{V}_a \times \mathbf{n}) d\Sigma = -\Gamma \mathbf{k}$ . On en déduit immédiatement l'expression de la force résultante exercée par le fluide sur l'unité de longueur de l'objet cylindrique :

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{U} \times \oint_{\Sigma} (\mathbf{V}_a \times \mathbf{n}) d\Sigma = \rho \Gamma (\mathbf{k} \times \mathbf{U}). \quad (10)$$

La seconde égalité constitue le théorème de Kutta-Joukovsky. On retiendra que la valeur de cette force est égale au produit de la masse volumique par la vitesse du corps ( $\mathbf{U}$ ) et par la circulation de la vitesse autour du corps ( $\Gamma$ ).



$$\mathbf{n} = (\alpha, \beta, 0)$$

$$\mathbf{t} = \left( \frac{dx}{ds} = -\beta, \frac{dy}{ds} = \alpha, 0 \right)$$

$$\mathbf{V}_a = (u, v, 0)$$

$$\mathbf{V}_a \times \mathbf{n} = \left[ 0, 0, \left( -u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} \right) \right]$$

Figure 2. Notations employées pour le calcul de l'intégrale  $\oint_{\Sigma} (\mathbf{V}_a \times \mathbf{n}) d\Sigma$ .

Rappelons maintenant un résultat classique de la transformation de Joukovsky, qui permet d'engendrer un profil d'aile à partir d'un cercle. Cette transformation permet aussi de déduire les propriétés de l'écoulement autour de l'aile de celles de l'écoulement autour du cercle : la circulation de la vitesse étant conservée dans toute transformation conforme, sa valeur autour de l'aile est exactement celle autour du cercle, soit :

$$\Gamma = 4\pi V a i, \quad (11)$$

où  $V$  désigne la vitesse de l'écoulement lointain dans le référentiel de l'objet,  $a$  le rayon du cercle générateur du profil d'aile et  $i$  l'incidence de l'aile. Son signe montre que la portance, que l'on peut écrire  $F_3 = \rho \Gamma U$  dans le repère entraîné de la figure 1, peut être soit positive, ce qui est le cas lorsque l'aile a une incidence positive, soit négative, comme autour du becquet arrière des voitures de course dont l'incidence est négative. On se souvient que, à deux dimensions, cette grandeur  $F_z$  représente la force exercée sur une unité de longueur de l'aile.

### 3. Théorie de Prandtl pour les ailes d'envergure finie

A la différence du fuselage, les ailes d'un avion ont une envergure tellement grande que le mouvement du fluide autour d'elles est très proche d'un écoulement bidimensionnel dans le plan orthogonal à leur axe  $Oy$ , comme présenté sur la figure 3.

Considérons une tranche infinitésimale de l'aile de longueur  $dy$ , comme représenté sur la figure 4.

On peut lui appliquer le résultat ci-dessus (10) et écrire la portance subie par cet élément de l'aile :

$$dF = -\rho V \Gamma dy. \quad (12)$$

Dans cette expression (12),  $V(y)$  désigne la vitesse avec laquelle le profil d'aile considéré, situé à la distance  $y$  de l'origine dans le sens de l'envergure, est attaqué par le fluide. Sa valeur et sa direction peuvent s'écarter de façon significative de celles de la vitesse du vent uniforme au loin, que l'on notera  $V_0$ . Elle dépend de  $y$ , tout comme l'incidence locale  $i(y)$ , la circulation locale de la vitesse autour du profil considéré  $\Gamma(y)$ , ainsi que la corde  $\ell(y)$ .

On notera aussi que la force élémentaire de module  $dF$  est orientée dans la direction orthogonale à la vitesse  $\mathbf{V}$ , qui peut aussi s'écarter de façon significative de la normale à la vitesse du vent au loin  $\mathbf{V}_0$ . Les variations de ces grandeurs en fonction de  $y$ , c'est-à-dire le long de l'envergure, constituent l'originalité des ailes d'envergure finie par rapport aux ailes bidimensionnelles. Elles sont illustrées sur la figure 5.

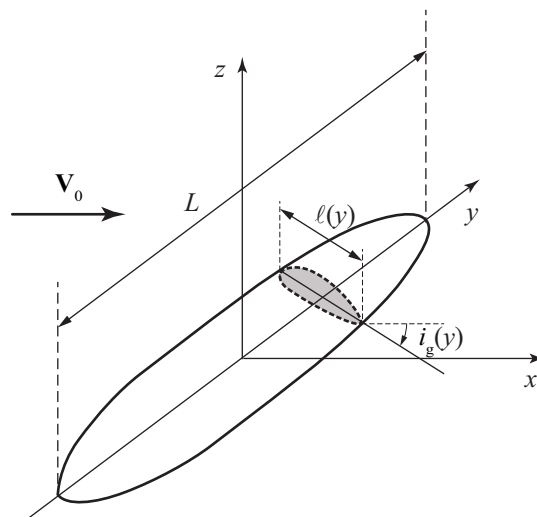


Figure 3. Schéma d'une aile d'envergure finie, dont la corde  $\ell(y)$  et l'incidence géométrique  $i_g(y)$  varient le long de l'envergure, et où la condition  $\ell \ll L$  est assez bien satisfaite.

Pour évaluer leurs effets, Prandtl a proposé les hypothèses simplificatrices suivantes :

- puisque la corde de l'aile  $\ell$  est beaucoup plus petite que son envergure  $L$ , on remplace l'aile par un segment de droite de longueur  $L$  appelé *ligne portante* (fig. 4),
- on admet que le profil d'aile est encore un profil tiré de la transformation de Joukovsky à partir d'un cercle générateur de rayon  $a$ ,
- et l'on admet qu'en toute abscisse  $y$  le long de cette ligne portante, la relation (11) est encore justifiée.

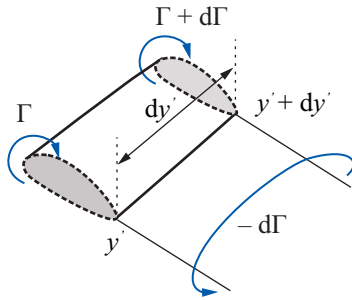


Figure 4. Vue d'une tranche d'aile de longueur  $dy'$  et illustration schématique de la variation de la circulation  $\Gamma(y)$ .

Le point crucial consiste alors à exprimer la variation de vitesse  $V(y)$ . A cette fin, Prandtl introduit une *vitesse induite*  $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0$ , et une *incidence induite*  $j = i - i_g$ , qui caractérisent de quelle façon le profil d'aile est attaqué par l'écoulement à toute abscisse  $y$ . En un point donné, d'abscisse  $y'$ , la vitesse induite par une bande de longueur infinitésimale  $dy'$  se déduit de la loi de Biot-Savart

$$d\mathbf{w} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{y - y'}. \quad (13)$$

Par suite, la vitesse induite à l'abscisse  $y$  par l'ensemble du système tourbillonnaire créé autour de l'aile et l'incidence induite s'en déduisent comme suit:

$$\mathbf{w}(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}, \quad j(y) = \frac{w}{V_0}. \quad (14)$$

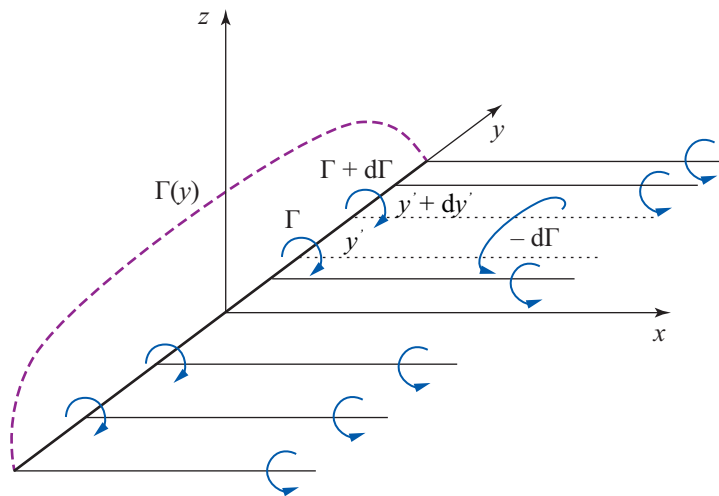


Figure 5. Illustration schématique de la ligne portante, de la variation de la circulation et du système tourbillonnaire global à l'appui des intégrations (13) et (14).

Ces expressions mettent en évidence l'influence de la distribution  $\Gamma(y)$ . En les reportant dans la relation (11), on obtient finalement l'équation intégrale qui permet de déterminer la fonction  $\Gamma(y)$ :

$$\frac{\Gamma(y)}{4\pi a V_0} = i_g - \frac{1}{4\pi V_0} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}. \quad (15)$$

Si l'on se donne a priori une loi  $\Gamma(y)$ , il est assez simple de résoudre cette équation (15) et d'en déduire l'incidence géométrique  $i_g$ , ainsi que les deux composantes de la force donnée par la relation de Kutta-Joukovsky (10). A titre d'exemple de résultat de ce calcul direct, choisissons une distribution elliptique de la circulation  $\Gamma = \frac{\Gamma_0}{L} \sqrt{L^2 - 4y'^2}$ , qui l'annule bien aux extrémités comme cela est nécessaire pour garantir l'invariance de l'intensité tourbillonnaire tout au long du système

tourbillonnaire. On obtient alors les expressions suivantes pour la portance  $F_z$ , ainsi que pour la traînée induite  $F_x$  :

$$F_z = \frac{\pi}{4} \rho V_0 L \Gamma_0, \quad F_x = \frac{\pi}{2} \rho V_0^2 L^2. \quad (16)$$

Mais ceci représente l'inverse du problème réel, qui consiste à trouver la loi  $\Gamma(y)$ , de façon à en déduire les efforts (portance et traînée) exercés sur une aile qui est placée dans un vent donné avec une incidence fixée. Dans ce problème réel, c'est  $i_g$  qui est donné, éventuellement variable avec  $y$  dans le cas d'une aile vrillée, comme une pale d'éolienne, et l'on souhaite déduire  $\Gamma(y)$  de l'équation (15) pour calculer ensuite la portance et la traînée. On doit alors procéder par tâtonnements pour résoudre l'équation intégrale (15). On notera bien qu'une traînée de frottement, dépendante de la viscosité, devrait s'ajouter à celle évoquée ci-dessus, qui, comme la portance, provient du bilan des forces de pression sur l'aile.