

Moyenne arithmético-géométrique, intégrales elliptiques et calcul de π

0. Introduction	1
1. Moyenne arithmético-géométrique	1
2. Intégrales elliptiques	2
3. Transformation de Landen	3
4. Évaluation des intégrales elliptiques	5
5. Relation de Legendre	6
6. Formule de Brent-Salamin pour π	7
7. Code pour PARI/GP	9

0. Introduction

L'objectif de ce texte est d'expliquer le lien entre la moyenne arithmético-géométrique et les intégrales elliptiques, découvert par C.F. Gauss en 1799 alors qu'il avait 22 ans⁽¹⁾. On démontrera ensuite la relation de Legendre (1811), qui fournit une méthode de calcul de π extrêmement efficace. Elle aurait donc déjà pu être découverte au début du 19^e siècle, mais il fallut en réalité attendre les travaux de Brent et Salamin en 1976 pour que cette méthode soit explicitement suggérée comme moyen de calcul de π .

1. Moyenne arithmético-géométrique

Étant donnés deux réels $a, b > 0$, on considère les suites (a_n) , (b_n) définies par la relation de récurrence $(a_0, b_0) = (a, b)$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \end{cases}$$

Comme les termes d'indices $n \geq 1$ restent inchangés si on permute a et b , il n'est pas restrictif de supposer $a \geq b > 0$. Dans ce cas, nous affirmons que (a_n) est une suite

⁽¹⁾ voir aussi : A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse pour l'agrégation, Analyse 1 (Topologie, suites et séries, intégration)*, Paris : Masson, 230 p. (1995).

décroissante, que (b_n) est une suite croissante, et que les deux suites sont adjacentes. En effet

$$(1.1) \quad a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geq 0,$$

on a donc $a_n \geq b_n$ pour tout $n \geq 1$. Ceci implique $a_{n+1} \leq a_n$ et $b_{n+1} \geq b_n$ pour tout $n \geq 0$, par conséquent

$$(1.2) \quad b = b_0 \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \dots \leq a_0 = a.$$

Comme les suites sont monotones et bornées, leurs limites respectives $\alpha = \lim a_n$ et $\beta = \lim b_n$ existent, et la relation $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ entraîne $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ d'où $\alpha = \beta$. Ceci implique bien que les suites sont adjacentes. On note

$$(1.3) \quad M(a, b) = \lim a_n = \lim b_n$$

leur limite commune, appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b , et on pose de plus

$$(1.4) \quad c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}.$$

Il vient d'après (1.1) $c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$, donc c_n décroît vers 0 et

$$c_n^2 = (a_n - b_n)(a_n + b_n) = 4c_{n+1}a_{n+1} \Rightarrow c_{n+1} \leq \frac{c_n^2}{4M(a, b)}.$$

En posant $M = M(a, b)$, ceci se récrit $c_{n+1}/4M \leq (c_n/4M)^2$, donc on voit par récurrence que $c_n/4M \leq (c_{n_0}/4M)^{2^{n-n_0}}$. Il s'agit d'une convergence de type quadratique : si n_0 est pris tel que $c_{n_0}/4M \leq 10^{-1}$, on va avoir

$$(1.5) \quad a_n - b_n = 2c_{n+1} \leq 8M 10^{-2^{n+1-n_0}},$$

soit déjà environ $2^{10} > 1000$ décimales exactes pour $n = n_0 + 9$.

2. Intégrales elliptiques

Pour $a, b > 0$ on introduit les intégrales

$$(2.1) \quad I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}, \quad J(a, b) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt.$$

Il est facile de voir que le périmètre de l'ellipse de demi-axes a, b est égal à $4J(a, b)$, et pour cette raison, ces intégrales ont été appelées intégrales elliptiques. Il est évident que $I(b, a) = I(a, b)$ et $J(b, a) = J(a, b)$ en faisant le changement de variable $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$.

3. Transformation de Landen

À l'aide d'un changement de variable astucieux, appelé transformation de Landen, on va montrer que $I(a, b)$ et $J(a, b)$ satisfont les relations

$$(3.1) \quad I(a_1, b_1) = I(a, b),$$

$$(3.2) \quad 2J(a_1, b_1) = J(a, b) + abI(a, b),$$

où $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = \sqrt{ab}$ comme au § 1. Le changement de variable consiste à poser

$$u = t + \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a} \tan t\right).$$

Il réalise une bijection croissante de $[0, \pi/2[$ sur $[0, \pi[$, et peut se prolonger différentiablement à $[0, \pi/2]$ comme on va le voir. On a en effet

$$\frac{du}{dt} = 1 + \frac{\frac{b}{a}(1 + \tan^2 t)}{1 + (\frac{b}{a})^2 \tan^2 t} = 1 + \frac{ab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{(a+b)(a \cos^2 t + b \sin^2 t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

D'autre part, si $\varphi \in [0, \pi/2[$, on a

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}.$$

En posant $\varphi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a} \tan t\right)$ et $u = t + \varphi$, ceci implique $\tan \varphi = \frac{b}{a} \tan t$ et

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi \\ &= \cos t \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 \tan^2 t}} - \sin t \frac{\frac{b}{a} \tan t}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 \tan^2 t}} = \frac{a \cos^2 t - b \sin^2 t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin u &= \sin t \cos \varphi + \cos t \sin \varphi \\ &= \sin t \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 \tan^2 t}} + \cos t \frac{\frac{b}{a} \tan t}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 \tan^2 t}} = \frac{(a+b) \sin t \cos t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} a_1^2 \cos^2 u + b_1^2 \sin^2 u &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \left(\cos^2 u + \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 u\right) \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{(a \cos^2 t - b \sin^2 t)^2 + 4ab \sin^2 t \cos^2 t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{(a \cos^2 t + b \sin^2 t)^2}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}, \end{aligned}$$

soit, en posant $\Delta(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$

$$\Delta_1(u) = \sqrt{a_1^2 \cos^2 u + b_1^2 \sin^2 u} = \frac{a+b}{2} \frac{a \cos^2 t + b \sin^2 t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}.$$

En combinant ceci avec le calcul de du/dt qui donne

$$du = \frac{(a+b)(a \cos^2 t + b \sin^2 t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt,$$

il vient

$$(3.3) \quad \frac{1}{2} \frac{du}{\Delta_1(u)} = \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 u + b_1^2 \sin^2 u}} = \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{dt}{\Delta(t)}.$$

Après intégration, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 u + b_1^2 \sin^2 u}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}},$$

d'où la relation (3.1) par symétrie des intégrales sur $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$. Pour obtenir (3.2), nous observons que

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Delta_1(u) + \frac{a-b}{2} \cos u &= \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a \cos^2 t + b \sin^2 t) + (a-b)(a \cos^2 t - b \sin^2 t)}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \\ &= \frac{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \Delta(t), \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Delta_1(u) - \frac{a-b}{2} \cos u &= \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a \cos^2 t + b \sin^2 t) - (a-b)(a \cos^2 t - b \sin^2 t)}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \\ &= \frac{ab \cos^2 t + ab \sin^2 t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{ab}{\Delta(t)}. \end{aligned}$$

En faisant la somme, nous trouvons

$$(3.6) \quad 2 \Delta_1(u) = \Delta(t) + \frac{ab}{\Delta(t)}.$$

La relation (3.3) donne par ailleurs $du = 2 \frac{\Delta_1(u)}{\Delta(t)} dt$, donc en multipliant (3.4) par du il s'ensuit

$$(3.7) \quad \Delta_1(u) du + \frac{a-b}{2} \cos u du = \Delta(t) du = 2 \Delta_1(u) dt = \left(\Delta(t) + \frac{ab}{\Delta(t)} \right) dt.$$

Comme $\int_0^\pi \cos u du = 0$, nous obtenons après intégration pour $t \in [0, \pi/2]$ et $u \in [0, \pi]$:

$$2 J(a_1, b_1) = J(a, b) + ab I(a, b),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4. Évaluation des intégrales elliptiques

On utilise la moyenne arithmético-géométrique $M = M(a, b) = \lim a_n = \lim b_n$. La relation (3.1) donne par récurrence $I(a, b) = I(a_n, b_n)$, et il est facile de voir qu'il y a convergence uniforme vers l'intégrale $I(M, M) = \frac{\pi/2}{M}$. On obtient donc déjà la formule célèbre due à C.F. Gauss

$$(4.1) \quad I(a, b) = \frac{\pi/2}{M(a, b)}.$$

La formule (3.2) implique par ailleurs

$$\begin{aligned} 2(J(a_1, b_1) - a_1^2 I(a_1, b_1)) &= J(a, b) + ab I(a, b) - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 I(a, b) \\ &= J(a, b) - \frac{a^2 + b^2}{2} I(a, b) \\ &= J(a, b) - a^2 I(a, b) + \frac{1}{2} c^2 I(a, b) \end{aligned}$$

et en remplaçant (a, b) par (a_{n-1}, b_{n-1}) on en déduit de même

$$2(J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_n, b_n)) = J(a_{n-1}, b_{n-1}) - a_{n-1}^2 I(a_{n-1}, b_{n-1}) + \frac{1}{2} c_{n-1}^2 I(a, b).$$

En multipliant par 2^{n-1} , il vient aisément par récurrence

$$(4.2) \quad 2^n (J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_n, b_n)) = J(a, b) - a^2 I(a, b) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} 2^j c_j^2 I(a, b).$$

Nous affirmons que le membre de gauche tend vers 0 du fait de la convergence rapide. En effet on a les inégalités

$$\frac{\pi}{2} b \leq J(a, b) \leq \frac{\pi}{2} a, \quad \frac{\pi}{2a} \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2b},$$

donc

$$\frac{\pi}{2} \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \leq J(a, b) - a^2 I(a, b) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |J(a, b) - a^2 I(a, b)| \leq \frac{\pi}{2b} (a^2 - b^2) = \frac{\pi}{2b} c^2,$$

et par conséquent

$$2^n |J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_n, b_n)| \leq 2^n \frac{\pi}{2b_n} c_n^2 \leq 2^n \frac{\pi}{2b} c_n^2,$$

ce qui tend vers zéro du fait de la convergence super-exponentielle de c_n . À la limite, la relation (4.2) implique la formule

$$(4.3) \quad J(a, b) = I(a, b) \left(a^2 - \sum_0^{+\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) = \frac{\pi}{2} \frac{a^2 - \sum_0^{+\infty} 2^{n-1} c_n^2}{M(a, b)}$$

qui permet d'évaluer efficacement $J(a, b)$ (et donc le périmètre de l'ellipse $= 4 J(a, b)$).

5. Relation de Legendre

Soit a, b, c des réels > 0 tels que $a^2 = b^2 + c^2$ et a_n, b_n, c_n comme au paragraphe 1. Nous avons

$$(5.1) \quad I(a_1, b_1) = I(a, b)$$

et comme $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $c_1 = \frac{a-b}{2}$, il vient

$$(5.2) \quad I(a_1, c_1) = I\left(\frac{a_1 + c_1}{2}, \sqrt{a_1 c_1}\right) = I(a/2, c/2) = 2 I(a, c).$$

Par ailleurs

$$(5.3) \quad J(a_1, b_1) = \frac{1}{2} (J(a, b) + ab I(a, b)),$$

et donc

$$J(a, c) = 2 J(a/2, c/2) = 2 J\left(\frac{a_1 + c_1}{2}, \sqrt{a_1 c_1}\right) = J(a_1, c_1) + a_1 c_1 I(a_1, c_1),$$

ce qui implique

$$(5.4) \quad J(a_1, c_1) = J(a, c) - \frac{c^2}{2} I(a, c).$$

La relation de Legendre consiste à évaluer l'expression

$$E(a, b) = I(a, b)J(a, c) + I(a, c)J(a, b) - a^2 I(a, b)I(a, c).$$

Pour cela, on va chercher la transformée de $E(a, b)$ par l'opération de moyenne arithmético-géométrique. D'après (5.1–5.4), on trouve

$$\begin{aligned} E(a_1, b_1) &= I(a_1, b_1)J(a_1, c_1) + I(a_1, c_1)J(a_1, b_1) - a_1^2 I(a_1, b_1)I(a_1, c_1) \\ &= I(a, b) \left(J(a, c) - \frac{c^2}{2} I(a, c) \right) + 2 I(a, c) \frac{1}{2} (J(a, b) + ab I(a, b)) \\ &\quad - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 I(a, b)I(a, c) \\ &= E(a, b). \end{aligned}$$

On a par conséquent $E(a, b) = E(a_n, b_n)$ et il est naturel de chercher à évaluer la limite quand $n \rightarrow +\infty$. Nous avons d'une part

$$\lim I(a_n, b_n) = I(M, M) = \frac{\pi/2}{M}, \quad \lim J(a_n, c_n) = J(M, 0) = \int_0^{\pi/2} M \cos t \, dt = M.$$

D'autre part, comme $a \geq c$, on a aussi $I(a, c) \leq \frac{\pi}{2c}$, et la majoration de $J(a, b) - a^2 I(a, b)$ par $(\pi/2b)c^2$ obtenue dans la section 4 entraîne alors

$$|I(a, c)J(a, b) - a^2 I(a, b)I(a, c)| = I(a, c)|J(a, b) - a^2 I(a, b)| \leq \frac{\pi^2}{4b}c.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(a_n, c_n)J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_n, b_n)I(a_n, c_n) = 0$ et donc

$$E(a, b) = \lim E(a_n, b_n) = I(M, M)J(M, 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci donne la relation de Legendre reliant les intégrales elliptiques :

$$(5.5) \quad I(a, b)J(a, c) + I(a, c)J(a, b) - a^2 I(a, b)I(a, c) = \frac{\pi}{2}.$$

6. Formule de Brent-Salamin pour π

On applique la formule de Legendre avec $a = 1$ et $0 < b < 1$, $b' = c = \sqrt{1 - b^2}$. Si nous désignons par c'_n la suite associée au calcul de la moyenne arithmético-géométrique $M(a, b')$, on obtient grâce à (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= I(1, b)J(1, b') + I(1, b')J(1, b) - I(1, b)I(1, b') \\ &= I(1, b)I(1, b') \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-1} c_n^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-1} c_n'^2 \right) \end{aligned}$$

Comme $c_0 = c = b'$ et $c'_0 = \sqrt{1 - b'^2} = b$, on a $c_0^2 + c_0'^2 = 1$, donc $1 - 2^{-1}(c_0^2 + c_0'^2) = \frac{1}{2}$. En multipliant l'égalité précédente par 2 il vient

$$\pi = I(1, b)I(1, b') \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (c_n^2 + c_n'^2) \right) = \frac{\pi^2}{4 M(1, b)M(1, b')} \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (c_n^2 + c_n'^2) \right)$$

Ceci fournit la formule proposée par Richard Brent⁽²⁾ et Eugene Salamin⁽³⁾

$$(6.1) \quad \pi = \frac{4 M(1, b)M(1, b')}{1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (c_n^2 + c_n'^2)}, \quad \forall b, b' > 0, \quad b^2 + b'^2 = 1.$$

⁽²⁾ R.P. Brent, *Multiple-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation*, Traub, J.F., ed., Analytic Computational Complexity (1975), 151–176.

⁽³⁾ E. Salamin, *Computation of π using arithmetic-geometric mean*, Mathematics of computation, vol. 30, **135** (1976), 565–570.

Le choix le plus simple consiste à prendre $b = b' = 2^{-1/2}$, pour lequel on a

$$(6.2) \quad \pi = \frac{4M(1, 2^{-1/2})^2}{1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n+1} c_n^2}.$$

On effectuera par exemple le calcul de a_n, b_n jusqu'à l'indice n , puis $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, et on prendra l'approximation

$$(6.3) \quad \pi_n = \frac{4a_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1} c_j^2}.$$

Analysons rapidement l'erreur. Comme on a $b_{n+1} \leq M \leq a_{n+1}$, l'erreur au numérateur est majorée par $4(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2) = 4c_{n+1}^2$, tandis qu'au dénominateur elle est d'un ordre plus grand, soit $2^{n+2}c_{n+1}^2 + O(2^{n+3}c_{n+2}^2)$. Si δ désigne le dénominateur de (6.2), on a $\pi = 4M^2/\delta$ et $c_{n+1} \leq c_n^2/4M$ avec $b_1 = 2^{-1/4} \leq M \leq a_0 = 1$. Ceci donne pour l'erreur l'équivalent

$$\begin{aligned} |\pi_n - \pi| &\sim \frac{4M^2}{\delta} \left(\frac{1 + c_{n+1}^2/M^2}{1 - 2^{n+2}c_{n+1}^2/\delta} - 1 \right) \sim \frac{4M^2}{\delta^2} 2^{n+2} c_{n+1}^2 = \frac{\pi^2}{4M^2} 2^{n+2} c_{n+1}^2 \\ &\sim \frac{\pi^2}{16M^4} 2^n c_n^4 \leq 1, 2 \cdot 2^n c_n^4. \end{aligned}$$

Le calcul à l'aide d'un logiciel comme PARI/GP fournit

$$c_1/4M \leq c_1/4b_1 = 0,04289 < 10^{-1},$$

donc $c_n \leq 4M 10^{-2^{n-1}}$ d'après (1.5); par conséquent, on obtiendra déjà largement plus de deux milliards de décimales exactes pour $n = 30$. Comme on dispose d'algorithmes très efficaces pour calculer les sommes, produits, quotients et racines de grands nombres (algorithme de Schönhage-Strassen⁽⁴⁾ reposant sur l'utilisation de la transformée de Fourier rapide ou FFT⁽⁵⁾), on sait également calculer π de manière ultra-rapide – le temps de calcul de N décimales croît presque linéairement en N , de l'ordre de $N(\log N)^2$, soit à peine plus que le temps N nécessaire pour seulement écrire le résultat...

L'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique a d'autres avatars intéressants, par exemple la formule suivante due elle aussi à C.F. Gauss

$$e^\pi = 32 \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{2^{-n+1}}.$$

⁽⁴⁾ A. Schönhage and V. Strassen, *Schnelle Multiplikation großer Zahlen*, Computing **7** (1971), 281–292.

⁽⁵⁾ J.W. Cooley and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comput. **19** (1965), 297–301.

7. Code pour PARI/GP

L'implémentation du code avec un logiciel comme PARI/GP est extrêmement simple. Voici un exemple de tel code "salamin.gp" pour un calcul avec environ 1000 décimales exactes, à exécuter par "gp salamin.gp" (moins de dix itérations suffisent).

```
default(colors,"9, 5, no, no, 4");

v=1000;                                /* initialisation des variables */
default(realprecision,v+20);
n=0;
a=1;b=1/sqrt(2);
a1=(a+b)/2;                            /* prochaine itération de a */
d=1;f=2;                                /* f stocke  $2^{n+1}$  */
decimales=1;

iterer()=
{
local(s,c,c2,p,u);                    /* a,b,a1 valent  $a_n, b_n, a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$  */
c=a1-b;                                /*  $c_{n+1} = (a_n - b_n)/2$  */
n=n+1;
b=sqrt(a*b);                          /* b stocke  $b_n$  nouveau */
a=a1;                                  /* a stocke  $a_n$  nouveau */
s=a+b;                                /* s vaut  $2a_{n+1}$  */
f=2*f;                                /* f vaut  $2^{n+1}$  */
c2=c*c;                                /* u vaut  $2^{n+1}c_n^2$  */
u=f*c2;                                /*  $d = 1 - \sum_{1 \leq j \leq n} 2^{j+1}c_j^2$  */
d=d-u;                                /*  $s*s = 4a_{n+1}^2$  */
p=s*s/d;                               /* majorant  $1.2 2^n c_n^4$  */
a1=s/2;
erreur=0.6*u*c2;
decimales=floor(-log(erreur)/log(10));
if(decimales>v+10,decimales=v);
print("n = ", n, ", decimales attendues = ", decimales);
print("pi = ", p);
print();
}

while(decimales<v,iterer());
```