

Le procédé de sommation d'Euler

Soit $a > 0$ un réel, et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ou complexe. On lui associe la suite $(\tilde{u}_n)$ telle que

$$(SE1) \quad \tilde{u}_n = \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k$$

(le procédé de sommation d'Euler le plus classique correspond au choix $a = 1$).

Théorème. *Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ , alors la suite $(\tilde{u}_n)$ converge également vers ℓ .*

Démonstration. Comme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n$, on a

$$\tilde{u}_n - \ell = \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (u_k - \ell) \quad \Rightarrow \quad |\tilde{u}_n - \ell| \leq \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k |u_k - \ell|.$$

Soit M un majorant de $|u_n|$, de sorte que $|\ell| \leq M$ et $|u_n - \ell| \leq 2M$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $k \geq N$ on ait $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$. Découpons la sommation en les indices $k \leq N-1$ et $k \geq N$, en supposant $n \geq N$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k |u_k - \ell| &\leq \frac{1}{(1+a)^n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} a^k \times 2M + \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} a^k \varepsilon \right) \\ &\leq \varepsilon + 2M \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} a^k. \end{aligned}$$

Pour $0 < \delta < 1$ (par exemple $\delta = 1/2$), on voit par ailleurs que

$$\frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} a^k \leq \frac{\delta^{1-N}}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} (\delta a)^k \leq \delta^{1-N} \left(\frac{1+\delta a}{1+a} \right)^n$$

tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc on peut choisir $N_1 > N$ tel que $n \geq N_1$ implique

$$\frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} a^k \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ceci montre que $|\tilde{u}_n - \ell| \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq N_1$, et le théorème est démontré. □

Pour transformer une série $\sum_{n \geq 0} u_n$, on applique le procédé précédent à la suite des sommes partielles

$$s_n = \sum_{0 \leq k < n} u_k \implies u_n = s_{n+1} - s_n.$$

La transformation d'Euler donne une nouvelle suite

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k s_k$$

qui correspond aux sommes partielles de la série $\sum \tilde{u}_n$ de terme général

$$\tilde{u}_n = \tilde{s}_{n+1} - \tilde{s}_n = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} - (1+a) \binom{n}{k} \right) a^k s_k.$$

Comme $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} - a \binom{n}{k} \right) a^k s_k \\ &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} (s_{k+1} - s_k) \\ &= \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k. \end{aligned}$$

On voit donc que pour les séries, le procédé de sommation d'Euler consiste à transformer une série $\sum u_n$ en la série $\sum \tilde{u}_n$ de terme général

$$(SE2) \quad \tilde{u}_n = \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k.$$

D'après le théorème ci-dessus, le procédé préserve la convergence des séries et la valeur de leur somme, ceci pour tout $a > 0$.

Exemple 1. On considère la série entière du logarithme népérien

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in]0, 1].$$

En choisissant $a = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \frac{1/x}{(1+1/x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x = \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^k dt \\ &= \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

On trouve l'identité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}},$$

qui équivaut à $\ln(1+x) = -\ln(1-\frac{1}{1+1/x})$. On observera que le membre de droite améliore très notablement la convergence de la série, en particulier pour $x=1$ (on passe d'une convergence lente à une convergence géométrique).

Exemple 2. On considère la série entière de la fonction Arctan

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in]0, 1].$$

En choisissant $a = \frac{1}{x^2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \frac{1/x^2}{(1+1/x^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x \\ &= \frac{1/x}{(1+1/x^2)^{n+1}} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k} dt = \frac{1/x}{(1+1/x^2)^{n+1}} \int_0^1 (1-t^2)^n dt. \end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt$ est un grand classique (cf. formule de Wallis), on trouve la relation de récurrence $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ et il en résulte

$$I_0 = 1, \quad I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n+1} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On obtient l'identité intéressante

$$(SE3) \quad \operatorname{Arctan} x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+1/x^2)^{n+1}} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n+1},$$

et en particulier, il résulte des égalités $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ les formules très simples suivantes découvertes par Euler :

$$\begin{aligned} \pi &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n+1}, \\ \pi &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n+1}, \end{aligned}$$

dont la convergence est approximativement en 2^{-n} , resp. 4^{-n} . On peut bien sûr aussi combiner (SE3) avec les formules du type de celle de John Machin

$$\pi = 16 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}.$$

En utilisant un argument de prolongement analytique pour les fonctions $\mathbb{R}$ -analytiques, il n'est pas difficile de voir que (SE3) reste vrai pour tout $x > 0$.

Code pour PARI/GP :

Initialiser par

```
u=3*sqrt(3)/2;s=u;n=0;
```

puis itérer la ligne

```
n=n+1;u=n*u/(4*n+2);s=s+u
```