Retour au site web

Exercice 10-1 : calcul par la méthode de la puissance n-ième

Étant donnés la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et le vecteur $\boldsymbol{u}^0 = [1, 0]^T$, l'algorithme de la puissance n-ième $\boldsymbol{u}^{(n)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n-1)}$ fournit les valeurs suivantes

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{u}^{(n)}$	1	2	5	14	41	122	365	1094
	0	-1	-4	-13	-40	-121	-364	-1093
					2,928	2,975	2,991	2,9973

Le rapport de deux composantes homologues successives, comme $41/14$, ou $x_i^{(n)}/x_i^{(n-1)}$ en général, est indiqué dans la dernière ligne, dans la colonne n. Il semble converger vers la valeur 3, qui serait la plus grande des valeurs propres. Le vecteur $\boldsymbol{u}^{(n)}$ semble tendre vers une limite proportionnelle au vecteur $[1, -1]^T$ qui serait le vecteur propre $\boldsymbol{v}_1$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 3$.

Comme expliqué dans le texte, il vaut mieux normaliser $\boldsymbol{u}^{(n)}$ dès qu'il est calculé, avec l'inconvénient que le calcul devient laborieux à la main. À l'aide de Scilab, nous avons trouvé la suite

n	0	1	2	$\cdots$	5	6
$\boldsymbol{v}^{(n)}$	1	0,8944272	0,7808688	$\cdots$	0,7100107	0,7080761
	0	$-0{,}4472136$	$-0{,}6246950$	$\cdots$	$-0{,}7041909$	$-0{,}7061361$

La valeur approchée de la valeur propre est obtenue, comme dans le texte, par la formule $\lambda_1 \simeq \boldsymbol{v}^{(6)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(6)} = 2{,}9999962$. Cette approximation est bien plus précise que la précédente, car elle repose en fait sur l'utilisation du quotient de Rayleigh.