Retour
au site web

### Exercice 10-2 : Calcul par la méthode de la puissance $n$-ième de l'inverse

L'approche directe (mais non recommandée en pratique) consiste à calculer l'inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ puis à appliquer, avec cette matrice, l'algorithme de la puissance $n$-ième. On trouve facilement

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

et la suite

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{u}^{(n)}$ | 1 | 2/3 | 5/9 | 14/27 | 41/81 | 122/243 | 365/729 |
| | 0 | 1/3 | 4/9 | 13/27 | 40/81 | 121/243 | 364/729 |
| | | | | | 0,976 | 0,991 | 0,9973 |

Les approximations successives de $\lambda_2$ convergent apparemment vers 1, tandis que les valeurs de $\boldsymbol{u}^{(n)}$ semblent s'approcher de $[1, 1]^T$.

Dès que la taille de la matrice dépasse $3 \times 3$, il est plus économique d'itérer la résolution du système linéaire $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)}$, ce qui se fait en une ligne de code avec Scilab : `u3 = A\u2` par exemple. Nous trouvons ainsi

| $n$ | 0 | 1 | 2 | $\cdots$ | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{u}^{(n)}$ | 1 | 0,6666667 | 0,5555556 | $\cdots$ | 0,5020576 | 0,5006859 |
| | 0 | 0,3333333 | 0,4444444 | $\cdots$ | 0,4979442 | 0,4993141 |

Le rapport $u_1^{(n)}/u_1^{(n-1)}$ fournit une approximation de la valeur propre ; nous obtenons, pour $n = 6$, $\lambda_2 \simeq 0{,}9973$ comme précédemment. Le quotient de Rayleigh donne ici encore une valeur plus précise

$$\boldsymbol{u}^{(6)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(6)}/\boldsymbol{u}^{(6)T}\boldsymbol{u}^{(6)} = 1{,}0000038.$$