Retour au site web

Exercice 10-4 : Valeurs propres et quotient de Rayleigh

a) Si λ_i et $\boldsymbol{v}_i$ sont éléments propres de $\boldsymbol{A}$ cela implique qu'ils vérifient l'équation $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$. En insérant cette relation dans la définition du quotient de Rayleigh, on trouve $Q(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i$.

b) $\boldsymbol{u}$ s'exprime comme

$$\boldsymbol{u} = \sum_1^n c_i \boldsymbol{v}_i.$$

Le quotient de Rayleigh s'écrit alors

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{u}) &= \frac{[\sum c_i \boldsymbol{v}_i]^T \boldsymbol{A} [\sum c_j \boldsymbol{v}_j]}{[\sum c_i \boldsymbol{v}_i]^T [\sum c_j \boldsymbol{v}_j]} \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^n c_i c_j \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_j}{\sum_{i,j=1}^n c_i c_j \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_j} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n c_i^2}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la définition et l'orthogonalité des vecteurs propres :

$$\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_j = \lambda_j \delta_{ij}.$$

Posons $D = \sum c_i^2$. On a alors les relations

$$Q(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{D} \sum c_i^2 \lambda_i \leq \frac{\lambda_1}{D} \sum c_i^2;$$

$$Q(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{D} \sum c_i^2 \lambda_i \geq \frac{\lambda_n}{D} \sum c_i^2.$$

On conclut que

$$\lambda_1 \geq Q(\boldsymbol{u}) \geq \lambda_n.$$

Il y a égalité si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1$ ou si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_n$.

c) On calcule

$$Q(\boldsymbol{u}) = Q(\theta) = 2 + 2 \sin\theta \cos\theta = 2 + \sin 2\theta$$

d'où l'encadrement $1 \leq Q \leq 3$. On en déduit que 1 et 3 sont valeurs propres de $\boldsymbol{B}$.