⇦ Retour au site web

Exercice 11-3 : Application de la méthode du point milieu

a) L'algorithme du point milieu s'écrit

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hAy_n$$

ce qui est effectivement une relation de récurrence à trois termes pour y_n.

b) En substituant $y_n = r^n$ dans cette relation, on obtient une équation (dite équation caractéristique) que doit satisfaire le paramètre inconnu r :

$$r^2 - 2hAr - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation du second degré s'écrivent

$$r' = Ah + \sqrt{A^2h^2 + 1} \quad ; \quad r'' = Ah - \sqrt{A^2h^2 + 1}.$$

c) Comme la relation de récurrence est linéaire, la forme la plus générale de y_n est une combinaison linéaire $y_n = c'r'^n + c''r''^n$. Les coefficients inconnus c', c'' sont déterminés par les conditions initiales. On a, en général

$$\begin{cases} y_0 = c' + c'', \\ y_1 = c'r' + c''r'', \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$c' = \frac{y_1 - r''y_0}{r' - r''} \quad ; \quad c'' = \frac{y_1 - r'y_0}{r' - r''}.$$

d) Écrivons que c', c'' satisfont les conditions initiales, au second ordre en h. On a $y_0 = 1$ et $y_1 = 1 + Ah + A^2h^2/2$. Par ailleurs, à la même approximation

$$r' \simeq Ah + 1 + A^2h^2/2 \quad ; \quad r'' \simeq Ah - 1 - A^2h^2/2.$$

En reportant dans les expressions de c', c'', il vient $c' \simeq 1$ et $c'' \simeq 0$. On a donc $y_n = r'^n$.

e) On choisit $A = -1$, $h = 0{,}3$. On peut faire les calculs à la main ou, plutôt, avec une calculette ou écrire le programme correspondant. On trouve les résultats présentés sur la figure. L'algorithme du point milieu est instable pour cette valeur du pas.

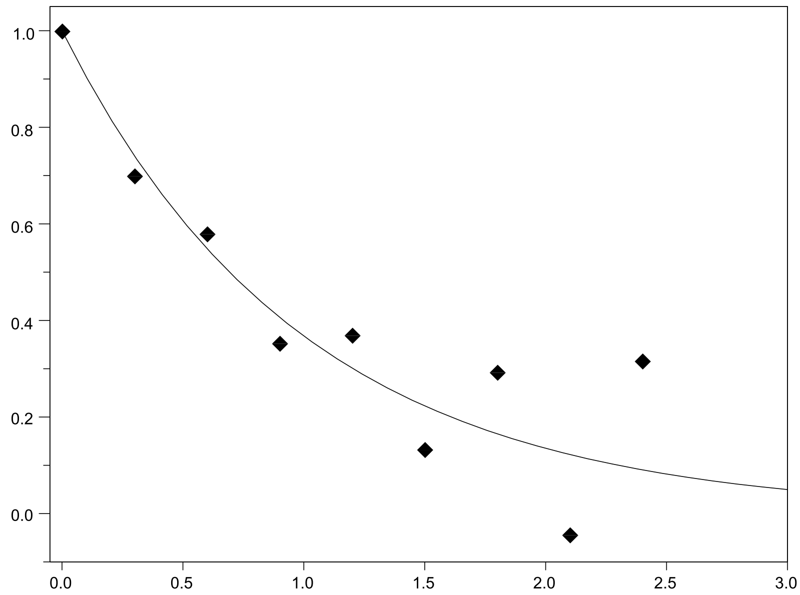

FIGURE 1 – Le problème différentiel $y' = -y, y(0) = 1$. Solution analytique et solution numérique (losanges).