Exercice 11-5 : Application de l'algorithme d'Euler (1/2)

a) On écrit que l'énergie totale est constante :

$$\frac{d}{dt}(x'^2 + \omega^2 x^2) = 2x'x'' + 2\omega^2 x x' = 0,$$

d'où l'on déduit que x obéit à l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$.

b) Pour pouvoir utiliser l'algorithme d'Euler, on pose $x' \equiv v$ et on remplace l'équation du second ordre par un système du premier ordre

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & v, \\ v' & = & -\omega^2 x. \end{array} \right.$$

L'algorithme s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + h v_n, \\ v_{n+1} & = & v_n - h\omega^2 x_n. \end{array} \right.$$

On calcule les énergies aux dates n et $n+1$:

$$2E_n = v_n^2 + \omega^2 x_n^2,$$

$$\begin{array}{rcl} 2E_{n+1} & = & v_{n+1}^2 + \omega^2 x_{n+1}^2, \\ & = & (v_n - h\omega^2 x_n)^2 + \omega^2 (x_n + h v_n)^2, \\ & = & v_n^2 (1 + \omega^2 h^2) + \omega^2 x_n^2 (1 + \omega^2 h^2), \\ & = & (1 + \omega^2 h^2) E_n. \end{array}$$

À chaque itération, l'énergie totale est multipliée par une facteur supérieur à 1 : l'algorithme n'est pas stable.