Exercice 11-9 : Application d'un algorithme à pas multiples

L'algorithme (L), défini dans le texte de l'exercice 11-8, s'énonce comme ceci :

$$\begin{aligned} v_{n+1/2} &= v_{n-1/2} + hf(x_n,t_n), && \text{(L1)} \\ x_{n+1} &= x_n + hv_{n+1/2}. && \text{(L2)} \end{aligned}$$

On applique cet algorithme à l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique libre, non amorti. La fonction f vaut alors $-\omega^2 x$.

a) La méthode suivante permet de calculer ε' sans trop de peine. D'après (L1),

$$v_{n+1/2} - v_{n-1/2} = -\omega^2 x_n.$$

On multiplie les deux membres par $v_{n+1/2} + v_{n-1/2}$ pour obtenir

$$v_{n+1/2}^2 - v_{n-1/2}^2 = -h\omega^2 x_n(v_{n+1/2} - v_{n-1/2}).$$

Dans la parenthèse de droite, on utilise (L2) pour éliminer les vitesses au profit des positions. Un réarrangement conduit à

$$v_{n+1/2}^2 + \omega^2 x_n x_{n+1} = v_{n-1/2}^2 + \omega^2 x_n x_{n-1}$$

qui montre que la quantité ε' reste constante lors d'une itération.

b) On calcule cette fois

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = hv_{n-1/2}(x_n + x_{n-1}).$$

L'équation (L1) permet d'éliminer, dans la parenthèse de droite, les positions en fonction des vitesses. On aboutit à

$$\omega^2 x_n^2 + v_{n-1/2}v_{n+1/2} = \omega^2 x_{n-1}^2 + v_{n-1/2}v_{n-3/2},$$

ce qui démontre la conservation de ε''.

c) Le calcul direct de $\varepsilon' - \varepsilon''$ donne un résultat nul : ces deux paramètres sont égaux.

d) Il faut exprimer le vecteur $[x_{n+1},v_{n+1/2}]$ en fonction de $[x_n,v_{n-1/2}]$. D'après (L1), $v_{n+1/2} = v_{n-1/2} - h\omega^2 x_n$. L'autre coordonnée de $\boldsymbol{r}_{n+1}$ s'obtient en éliminant $v_{n+1/2}$ entre (L1) et (L2) :

$$x_{n+1} = x_n + hv_{n+1/2} = x_n + h(v_{n-1/2} - h\omega^2 x_n) = x_n(1 - h\omega^2) + hv_n,$$

d'où la relation demandée :

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - h^2\omega^2 & h \\ -h\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ v_{n-1/2} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{N} \begin{bmatrix} x_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\boldsymbol{N}$ sont les racines de l'équation

$$s^2 - s(2 - h^2\omega^2) + 1 = 0.$$

Si $h\omega > 2$, les racines sont réelles ; comme leur produit vaut 1, l'une d'elle est supérieure à 1 et l'algorithme est instable. Si $h\omega < 2$, les racines sont complexes, de module 1. L'algorithme est alors stable.