

Exercice 12-1 : Application de la méthode du tir au problème modèle $y'' = y + 1$

a) On commence par résoudre l'équation linéaire homogène du second ordre

$$y'' = y.$$

La solution est une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$y = Ae^x + Be^{-x}.$$

$y = -1$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution complète de l'équation différentielle s'écrit donc

$$y = -1 + Ae^x + Be^{-x}.$$

Les valeurs des constantes A et B sont imposées par les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(0) = A + B - 1 = 1, \\ y(1) = Ae + B/e - 1 = 2, \end{cases}$$

un système linéaire dont la solution vaut

$$A = \frac{2 - 3e}{1 - e^2} \simeq 0,96334 \quad ; \quad B = e \frac{3 - 2e}{1 - e^2} \simeq 1,036658.$$

b) On associe au problème avec conditions aux limites le problème à conditions initiales

$$z'' = z + 1 \quad ; \quad z(0) = 1 \quad ; \quad z'(0) = \lambda.$$

La solution générale de l'équation différentielle a la même forme qu'en (a) :

$$z = -1 + Ce^x + De^{-x}$$

mais elle doit maintenant vérifier les conditions initiales

$$\begin{cases} z(0) = C + D - 1 = 1, \\ z'(0) = C - D = \lambda. \end{cases}$$

On tire

$$C = \frac{\lambda + 2}{2}, \quad D = \frac{2 - \lambda}{2}.$$

On impose ensuite que $z(x; \lambda)$ respecte la condition en $x = 1$

$$-1 + \frac{\lambda + 2}{2}e + \frac{2 - \lambda}{2} \frac{1}{e} = 2.$$

C'est une équation linéaire en λ dont la solution est

$$\lambda = 2 \frac{3e - e^2 + 1}{e^2 - 1}.$$

En reportant cette valeur dans les expressions de C et D , on s'aperçoit que $C = A$ et $D = B$.

c) L'équation différentielle reste la même, seules les conditions aux limites changent. On trouve facilement

$$u = -1 + e^x + e^{-x} \quad ; \quad v = -1 + \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

La fonction w est une combinaison linéaire de solutions d'une équation elle-même linéaire : elle satisfait donc aussi cette équation. On sait que $u(0) = v(0) = 1$; on a donc $w(0) = u(0) = 1$. Pour que $w(1)$ vérifie la deuxième condition aux limites, il faut que

$$u(1) + \lambda[v(1) - u(1)] = -1 + e + \frac{1}{e} + \frac{\lambda}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = 2.$$

Cette équation admet la solution

$$\lambda = 2 \frac{3e - e^2 + 1}{e^2 - 1}.$$

d) La méthode d'Euler appliquée avec $h = 0,3333$ donne

$y'(0)$	$y(1)$
0,3	1,978
0,4	2,081

On peut, à partir de ces données, pratiquer une interpolation linéaire pour trouver la « bonne » valeur de $y'(0)$. On calcule $y'(0) \simeq 0,321$ ce qui conduit à $y(1) = 1,999$.