Exercice 12-3 : Méthode des différences finies pour des pas différents

a) La solution analytique du problème différentiel s'écrit

$$y = \frac{1}{e - 1/e} e^x - \frac{1}{e - 1/e} e^{-x}.$$

Pour $h = 1/2$, on doit trouver l'unique inconnue y_1 qui obéit à l'équation

$$\frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) = y_1, \quad \text{avec } y_0 = 0, y_2 = 1,$$

d'où $y_1 = 4/9$.

Lorsque $h = 1/4$, il apparaît trois inconnues y_1, y_2, y_3 et trois équations

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) = y_1, \\ \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) = y_2, \\ \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) = y_3. \end{cases}$$

On a encore les conditions aux limites $y_0 = 0, y_4 = 1$. La solution est

$$y_1 = 0,21511, \quad y_2 = 0,44367, \quad y_3 = 0,69996;$$

y varie presque linéairement dans cet intervalle.

b) L'extrapolation de Richardson peut s'appliquer, de façon assez artificielle, à la valeur de y au point 2. Elle s'écrit

$$y_2^* = (4 \times 0,44367 - 4/9)/3 = 0,44342$$

à comparer à la valeur exacte $y(0,5) = 0,44341$.