Exercice 13-2 : Éléments finis pour différentes équations

a) La fonction φ_i est un polynôme de degré 1 par morceaux, dont nous allons chercher l'expression sur chaque intervalle.

Elle vaut 0 sur les intervalles où elle est nulle aux deux extrémités.

Sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, c'est un polynôme qui vaut 1 en x_i et 0 en x_{i-1}, son expression est donc $\varphi_i = (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1})$. De même, sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, elle vaut $\varphi_i = (x - x_{i+1})/(x_i - x_{i+1})$.

En conclusion, la fonction φ_i s'exprime ainsi :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = -\dfrac{x - x_{i+1}}{h} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

b) La fonction φ_i est dérivable par morceaux et sa dérivée vaut :

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ -\dfrac{1}{h} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On peut alors calculer les coefficients de la matrice de rigidité $K_{ij} = \int_0^L \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx$.

On se rend compte facilement que si $j \neq i-1,\ i,\ i+1$, le coefficient K_{ij} est nul.

Si $j = i - 1$ avec $2 \leq i \leq m$, on a

$$K_{i,i-1} = K_{i-1,i} = \int_0^L \varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x)\,dx = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\,dx = -\frac{1}{h}.$$

De même pour $1 \leq i \leq m$,

$$K_{ii} = \int_0^L \varphi_i'^2(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\,dx = \frac{2}{h}.$$

c) On rappelle que $\Phi_0(x) = x$ et $\Phi_1(x) = 1 - x$. On écrit alors

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \Phi_0\left(\dfrac{x - x_{i-1}}{h}\right) & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \Phi_1\left(\dfrac{x - x_i}{h}\right) & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

d) Un calcul simple donne $\displaystyle\int_0^1 \Phi_0^2(x)dx = \frac{1}{3}$, $\displaystyle\int_0^1 \Phi_1^2(x)dx = \frac{1}{3}$ et $\displaystyle\int_0^1 \Phi_0(x)\Phi_1(x)dx = \frac{1}{6}$.

Comme à la question (b), pour calculer les coefficients de la matrice de masse, il suffit de calculer $M_{i,i-1}$ avec $2 \leq i \leq m$ et M_{ii} avec $1 \leq i \leq m$. On trouve, à l'aide d'un changement de variable,

$$
\begin{aligned}
M_{i,i-1} &= M_{i-1,i} = \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)\,dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi_0\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)\Phi_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)\,dx = h\int_0^1 \Phi_0(x)\Phi_1(x)dx \\
&= \frac{h}{6}
\end{aligned}
$$

ainsi que

$$
\begin{aligned}
M_{ii} &= \int_0^L \varphi_i^2(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi_0^2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_1^2\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\,dx \\
&= h\left[\int_0^1 \Phi_0^2(x)dx + \int_0^1 \Phi_1^2(x)dx\right] = \frac{2h}{3}.
\end{aligned}
$$

e) Comme à la section 13.1.2, on commence par écrire la formulation variationnelle du problème :

$$\varepsilon\int_0^L u'(x)v'(x)\,dx + \lambda\int_0^L u(x)v(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx.$$

Le système correspondant à la discrétisation s'écrit

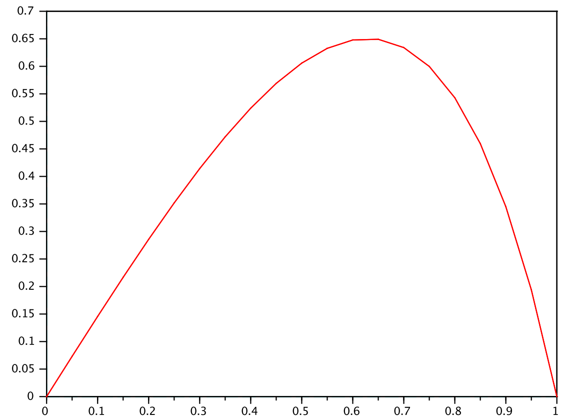
$$\varepsilon \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} + \lambda \boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F},$$

où le vecteur $\boldsymbol{U}$ est composé des coefficients inconnus u_j et où les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{K}$ ont été définies aux questions précédentes.

f) Voici le programme correspondant :

```
// Paramètres
lambda=10; epsilon=1;
// Discrétisation en espace
xmin=0; xmax=1; npt=21; nint=npt-1; nx=npt-2;
h=(xmax-xmin)/nint;
xx=linspace(xmin,xmax,npt);xx=xx';xxint=xx(2:nx+1);
// Matrice de rigidité
K=(2*eye(nx,nx)-diag(ones(nx-1,1),1)
                -diag(ones(nx-1,1),-1))/h;
// Matrice de masse
M=(4*eye(nx,nx)+diag(ones(nx-1,1),1)
                +diag(ones(nx-1,1),-1))*h/6;
// Second membre
F=xxint;
//// Résolution - système 1D
u=(epsilon*K+lambda*M)\F; uu=[0;u;0];
plot(xx,uu);
```

et le résultat :



g) La formulation variationnelle du problème devient maintenant :

$$\varepsilon \int_0^L u'(x)v'(x)\,dx + \lambda \int_0^L u'(x)v(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx.$$

Le système correspondant à la discrétisation s'écrit $\varepsilon \boldsymbol{KU} + \lambda \boldsymbol{AU} = \boldsymbol{F}$, où la matrice $\boldsymbol{A}$ a pour coefficients

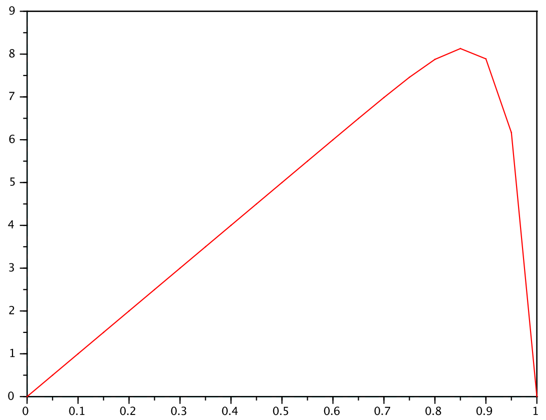
$$A_{ij} = \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j'(x)\,dx.$$

Un calcul similaire aux précédents à l'aide des fonctions Φ_0 et Φ_1 montre que $A_{ii} = 0$, $A_{i,i-1} = -1$ et $A_{i,i+1} = 1$.

h) Voici le programme correspondant :

```
// Paramètres
lambda=1; epsilon=0.1;
// Discrétisation en espace
xmin=0; xmax=1; npt=21; nint=npt-1; nx=npt-2;
h=(xmax-xmin)/nint;
xx=linspace(xmin,xmax,npt);xx=xx';xxint=xx(2:nx+1);
// Matrice de rigidité
K=(2*eye(nx,nx)-diag(ones(nx-1,1),1)
               -diag(ones(nx-1,1),-1))/h;
// Matrice d'advection
A=(diag(ones(nx-1,1),1)-diag(ones(nx-1,1),-1));
// Second membre
F=ones(xxint)
//// Résolution - système 1D
u=(epsilon*K+lambda*A)\F;  uu=[0;u;0];
plot(xx,uu);
```

et le résultat :



On voit que la fonction devient assez « raide »près de $x = 1$.