Retour au site web

Exercice 13-3 : Éléments finis et cond. aux bords pour l'équation de Poisson

a) Nous reprenons ce qui a été fait à la section 13.1.2. La formulation variationnelle s'écrit avec les conditions aux bords de l'exercice :

$$\int_0^L u'(x)v'(x)\,dx + v(0) = \int_0^L f(x)v(x)\,dx,$$

quelle que soit v assez régulière telle que $v(L) = 0$.

b) On décompose

$$u_h = \sum_{j=0}^{m+1} u_j \varphi_j.$$

$u_h(L) = 2$ impose que $u_{m+1} = 2$ et on cherche les autres coefficients à l'aide de la formulation variationnelle et des fonctions $v_h = \varphi_i$ pour $0 \leq i \leq m$. On obtient alors un système de $m+1$ équations avec $m+1$ inconnues. L'équation correspondant à φ_0 s'écrit

$$\sum_{j=0}^{m+1} u_j \int_0^L \varphi_j'(x)\varphi_0'(x)\,dx + 1 = \int_0^L f(x)\varphi_0(x)\,dx,$$

et les suivantes donnent :

$$\sum_{j=0}^{m+1} u_j \int_0^L \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx = \int_0^L f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

c) Le système est donc un système de taille $m+1$ qui s'écrit sous la forme suivante : $\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}$, où le vecteur $\boldsymbol{U}$ est composé des coefficients inconnus u_j pour $0 \leq j \leq m$.

La matrice de rigidité est définie de même qu'à la section 13.1.2, mais elle est cette fois-ci de taille $(m+1) \times (m+1)$, c'est-à-dire

$$K_{ij} = \int_0^L \varphi_{i-1}'(x)\varphi_{j-1}'(x)\,dx$$

et le second membre est un vecteur de taille $m+1$ ayant pour coefficients

$$F_i = \begin{cases} \displaystyle\int_0^L f(x)\varphi_0(x)\,dx - 1, & \text{si } i = 1, \\ \displaystyle\int_0^L f(x)\varphi_{i-1}(x)\,dx, & \text{si } 2 \leq i \leq m, \\ \displaystyle\int_0^L f(x)\varphi_m(x)\,dx - 2\int_0^L \varphi_m'(x)\varphi_{m+1}'(x)\,dx, & \text{si } i = m+1. \end{cases}$$

d) Dans le cas de la condition aux bords $u'(0) + u(0) = 1$ en 0, la formulation variationnelle s'écrit

$$\int_0^L u'(x)v'(x)\,dx - u(0)v(0) = \int_0^L f(x)v(x)\,dx - v(0),$$

et le problème est mal posé, c'est-à-dire que l'ensemble formé de l'équation et des deux conditions aux bords n'a pas forcément de solution. Par exemple, pour $f(x) = 1$, un calcul simple montre qu'il n'existe pas de solution vérifiant à la fois

$$-u''(x) = 1, \;\; \text{pour } x \in [0,1],\; u(0) + u'(0) = 1,\; u(1) = 2.$$

En revanche, pour la condition aux bords $u'(0)-u(0) = 1$ en 0, nous obtenons la fomulation variationnelle suivante :

$$\int_0^L u'(x)v'(x)\,dx + u(0)v(0) = \int_0^L f(x)v(x)\,dx - v(0)$$

et nous pouvons adapter ce que nous avons vu précédemment.