Retour au site web

Exercice 13-4 : Conditions de stabilité de différents schémas

Nous rappelons la technique vue à la section 13.2.2 pour prouver la stabilité : nous calculons le facteur d'amortissement en fonction du nombre d'onde k, du pas de temps τ et du pas d'espace h (et éventuellement en fonction de la quantité $r = \tau/h^2$). Pour que le schéma soit stable, il faut alors que le facteur d'amortissement $|\lambda|$ soit inférieur à 1 quel que soit le nombre d'onde k.

a) Pour le schéma d'Euler Implicite (13.16), le facteur d'amortissement vaut

$$|\lambda| = \frac{1}{1+4r\sin^2(kh/2)}\,;$$

le schéma est donc stable sans condition sur r.

Pour le schéma de Crank–Nicolson (13.18), le facteur d'amortissement vaut

$$|\lambda| = \frac{1-2r\sin^2(kh/2)}{1+2r\sin^2(kh/2)}$$

et la conclusion est la même.

b) Pour le schéma upwind (13.29), le facteur d'amortissement vaut

$$|\lambda| = \sqrt{\left(1-\frac{c\tau}{h}\right)^2 + \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 + 2\left(1-\frac{c\tau}{h}\right)\frac{c\tau}{h}\cos(kh)}$$

et le schéma est stable sous la condition $0 < c\tau/h < 1$. Détaillons ce calcul : on écrit la solution numérique au temps t_n sous la forme $U_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikjh}$. On reporte alors cette solution dans le schéma upwind (13.29) et on simplifie de façon à identifier λ, c'est-à-dire

$$\lambda^{n+1}e^{ikjh} = \lambda^n e^{ikjh} - c\frac{\tau}{h}\left(\lambda^n e^{ikjh} - \lambda^n e^{ik(j-1)h}\right)$$

qui se simplifie en

$$\lambda = 1 - c\frac{\tau}{h}\left(1-e^{-ikh}\right).$$

En prenant le module, on obtient :

$$|\lambda| = \sqrt{\left(1-c\frac{\tau}{h}(1-\cos(kh))\right)^2 + \left(c\frac{\tau}{h}\right)^2\sin^2(kh)}$$

et on obtient l'expression ci-dessus en développant.

Pour le schéma upwind (13.30), le facteur d'amortissement vaut

$$|\lambda| = \sqrt{\left(1+\frac{c\tau}{h}\right)^2 + \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 - 2\left(1+\frac{c\tau}{h}\right)\frac{c\tau}{h}\cos(kh)}$$

et le schéma est stable sous la condition $0 < -c\tau/h < 1$.

Pour le schéma centré (13.31), le facteur d'amortissement vaut

$$|\lambda| = \sqrt{1 + c^2\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2(hk)}$$

et le schéma n'est jamais stable.

c) Pour le schéma implicite centré, le facteur d'amortissement vaut

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2(hk)}}$$

et le schéma est toujours stable.

d) Pour le schéma de Lax–Wendroff, le facteur d'amortissement vaut

$$|\lambda| = \sqrt{1 + 4\left(\frac{c^2\tau^2}{h^2} - 1\right)\frac{c^2\tau^2}{h^2}\sin^4(hk/2)}$$

et le schéma est stable sous la condition $0 < |c\tau/h| < 1$.