Retour au site web

Exercice 14-1 : Loi de probabilité binomiale

D'après le texte,

$$b(k;n,p) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad \text{avec} \qquad p+q=1; \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a) La somme S des probabilités pour n donné est

$$S \equiv \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

On reconnaît la formule de Newton pour le développement de la puissance n-ième du binôme $p+q$ et donc

$$S = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

b) La valeur moyenne de K s'exprime comme

$$\mu =< K >= \sum_{k=1}^{k=n} k C_n^k p^k q^{n-k}$$

(la somme comprend aussi le terme $k=0$ qui ne contribue pas au résultat). Utilisons la définition du coefficient du binôme

$$kC_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

La valeur moyenne devient

$$\begin{aligned}
\mu &= n \sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}, \\
&= np \sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)}, \\
&= np \sum_{k'=0}^{k'=n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} q^{n-1-k'} = np(p+q)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

Une autre démonstration utilise le développement du binôme de $x+a$:

$$X \equiv (x+a)^n = \sum_0^n C_n^k x^k a^{n-k}.$$

Dérivons par rapport à x :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = n(x+a)^{n-1} = \sum_0^n C_n^k k x^{k-1} a^{n-k} = \sum_1^n C_n^k k x^k a^{n-k}.$$

Faisons $x = p$, $a = 1-p = q$ dans ces expressions ; vous reconnaissez à droite la définition de la valeur moyenne de K alors que le membre de gauche prend la valeur np. Le même procédé permet de calculer la variance. Nous dérivons une seconde fois le binôme pour trouver

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = n(n-1)(a+x)^{n-2} = \sum_0^n C_n^k k(k-1) x^{k-2} a^{n-k}.$$

Multiplions les deux membres par x^2 et développons le membre de droite, ce qui donne

$$n(n-1)x^2(a+x)^{n-2} = \sum_0^n C_n^k k^2 x^k a^{n-k} - \sum_0^n C_n^k k x^k a^{n-k}.$$

Faisons encore $x = p$, $a = q = 1 - p$; la relation précédente devient

$$p^2 n(n-1) =< K^2 > - < K > .$$

Nous savons que $< K >= np$ et que $\sigma_K^2 =< K^2 > - < K >^2$. Nous en déduisons la variance

$$\sigma_K^2 = np(1-p) = npq.$$

L'énoncé suggérait de calculer $< K(K-1) >$; faisons-le :

$$< K(K-1) >= \sum_k k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k}.$$

On voit facilement que $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$. En utilisant cette formule, on fait apparaître dans la somme le développement de $(p+q)^{n-2}$. On trouve alors

$$< K^2 > - < K >= n(n-1)p^2.$$

On termine le calcul comme précédemment.

c) La fonction génératrice permet un calcul un peu plus rapide ; remarquons qu'elle se met sous la forme de la puissance n-ième d'un binôme :

$$g(t) \equiv< t^K >= \sum_0^n t^k C_n^k p^k q^{n-k} = (pt+q)^n.$$

Les deux premières dérivées par rapport à t s'écrivent

$$g'(t) = np(pt+q)^{n-1} = \sum_0^n k t^{k-1} C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$g''(t) = n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2} = \sum_0^n k(k-1) t^{k-2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Faisons $t = 1$ dans ces formules ; nous obtenons

$$g'(1) = np =< K >; \qquad g''(1) = n(n-1)p^2 =< K(K-1) > .$$

On calcule σ_K^2 comme ci-dessus.