Exercice 14-12 : Une illustration de la méthode des moindres carrés

Notons $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les moyennes des angles mesurés ; elles valent

$$\bar{x} = 89°57; \quad \bar{y} = 45°5{,}33; \quad \bar{z} = 44°56{,}66$$

et leur somme vaut 179 ° 59. Il y a donc un tout petit écart à la géométrie euclidienne, dû aux erreurs de mesure des angles. Nous cherchons de meilleures valeurs des angles qui, en respectant au mieux les résultats expérimentaux, ont une somme rigoureusement égale à 180°. Pour cela, nous choisissons de nouvelles variables, les écarts aux valeurs moyennes, définis par les relations :

$$x = \bar{x} + u; \quad y = \bar{y} + v; \quad z = \bar{z} + w.$$

Nous imposons à u, v, w de respecter, pour chaque série de mesures, les résultats expérimentaux, ce qui conduit au système surdéterminé suivant (toutes les valeurs sont maintenant exprimées en minutes d'arc) :

$$\begin{array}{lll} u = -2; & v = -0{,}33; & w = 0{,}33; \\ u = 2; & v = 0{,}66; & w = -1{,}66; \\ u = 0; & v = -0{,}33; & w = 1{,}33. \end{array}$$

La somme des angles est de 180 ° , soit $\bar{x} + u + \bar{y} + v + \bar{z} + w = 180$, soit $u + v + w = 0$. Nous éliminons w à l'aide de cette équation pour former le nouveau système

$$\begin{array}{lll} u = -2; & v = -0{,}33; & u + v = 0{,}66; \\ u = 2; & v = 0{,}66; & u + v = 2{,}66; \\ u = 0; & v = -0{,}33; & u + v = -0{,}33. \end{array}$$

Ces équations font jouer un rôle équivalent aux inconnues u et v ; pour les résoudre au sens des moindres carrés, nous allons devoir modifier un peu le formalisme développé dans le texte. Elles relèvent de la forme générale

$$\alpha_i u + \beta_i v = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 9.$$

Dans notre cas, les α_i, β_i prennent les valeurs 0 ou 1, les γ_i traduisent les résultats expérimentaux. Nous calculons la somme des carrés des écarts, S ou χ^2

$$S = \sum_1^9 (\alpha_i u + \beta_i v - \gamma_i)^2$$

et nous écrivons que cette quantité est stationnaire par rapport aux variations de u et v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u} &= 2 \sum \alpha_i(\alpha_i u + \beta_i v - \gamma_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial v} &= 2 \sum \beta_i(\alpha_i u + \beta_i v - \gamma_i) = 0. \end{aligned}$$

En regroupant les termes, nous obtenons les équations de Gauss du problème

$$\begin{aligned} u \sum \alpha_i^2 + v \sum \alpha_i \beta_i &= \sum \alpha_i \gamma_i, \\ u \sum \alpha_i \beta_i + v \sum \beta_i^2 &= \sum \beta_i \gamma_i. \end{aligned}$$

Effectuant les sommes, nous trouvons

$$\begin{aligned} 6u + 3v &= 3, \\ 3u + 6v &= 3, \end{aligned}$$

dont la solution est $u = v = 0{,}33$ et, par conséquent, $w = 0{,}33$. Revenant aux angles en degrés, nous trouvons les valeurs ajustées

$$x = 89°57{,}33\,; \quad y = 45°5{,}66\,; \quad z = 44°57{,}0.$$