Retour au site web

Exercice 2-4 : Fonction de Bessel d'ordre zéro

a) Il est commode de considérer le logarithme de la valeur absolue du terme général :

$$v_k = \log |u_k| = 2(k \log x - k \log 2 - \log k!).$$

La formule de Stirling fournit l'approximation assez grossière $\log k! \simeq k \log k - k$. Le terme le plus grand est déterminé par la condition $dv_k/dk = 0$. Nous calculons, compte tenu de l'approximation sur $k!$,

$$\frac{d}{dk} v_k \simeq 2(\log x - \log 2 - \log k).$$

Cette dérivée s'annule pour $k^* = x/2$.

b) Comme dans l'exercice précédent, l'erreur de troncation est majorée, en valeur absolue, par le premier terme négligé. Nous conservons les n premiers termes de la série ($0 \leq k \leq n-1$) et nous imposons que

$$\left[\frac{(20)^n}{2^n n!}\right]^2 \leq 10^{-6}.$$

En extrayant la racine carrée et en remplaçant la factorielle par son approximation donnée par la formule de Stirling nous trouvons

$$\frac{10^n}{n!} \leq 10^{-3}.$$

Cette inégalité est satisfaite dès que $n \geq 32$. Le programme ci-dessous s'arrête dès que l'un des critères suivants est satisfait : le dernier terme calculé est inférieur à 10^{-7} ou lorsque le quarantième terme est atteint.

```
//Exercice 2-4: calcul de J_0 par le developpement en série
tol = 1.0e-7; imax = 40;
n = 0;
x = input("valeur de x: ");

somme = 0.0; terme = 1; i = 0;
xx = x*x;
while (abs(terme) > tol) & (i < imax)
   somme = somme + terme;
   terme = -xx/(4*(i+1)*(n+i+1))*terme;
   i = i + 1;
   tt(i) = terme;
end
//format(16);
mprintf("%s%12.9f\n","valeur calculée: ",somme)
mprintf("%s%12.9f\n","valeur donnée par Scilab: ",besselj(0,x));
```

Vous pourrez constater que le résultat coïncide, dans l'intervalle $[0, 20]$ avec le résultat calculé par Scilab jusqu'au 6[e] chiffre après le point décimal.