⇦ Retour au site web

Exercice 2-9 : Approximant de Padé

a) Le développement limité de $y = \operatorname{th} x$ s'obtient facilement mais laborieusement en utilisant la relation $y' = 1 - y^2$:

$$\begin{aligned}
y'' &= (1-y^2)' = -2yy' = -2y(1-y^2) = -2(y-y^3),\\
y^{(3)} &= -2(y' - 3y^2y') = -2(1-y^2)(1-3y^2) = -2(3y^4 - 4y^2 + 1),\\
y^{(4)} &= -2(12y^3 - 8y)y' = 8(3y^5 - 5y^3 + 2y),\\
y^{(5)} &= 8(15y^4 - 15y^2 + 2)(1-y^2) = -8(15y^6 - 30y^4 + 17y^2 - 2),\\
y^{(6)} &= -8(90y^5 - 120y^3 + 34y)(1-y^2) = 16(45y^7 - 105y^5 + 77y^3 - 17y),\\
y^{(7)} &= 16(315y^6 - 525y^4 + 231y^2 + 231y - 17).
\end{aligned}$$

Comme $y(0) = \operatorname{th}(0) = 0$, toutes les dérivées d'ordre pair sont nulles à l'origine, ce que l'on pouvait prévoir sachant que la fonction est impaire. Pour les dérivées d'ordre impair, on a

$$y'(0) = 1, \quad y^{(3)}(0) = -2, \quad y^{(5)}(0) = 16, \quad y^{(7)}(0) = -272.$$

Le développement cherché s'écrit donc

$$\operatorname{th} x \sim x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}(x^9).$$

b) Il faut ensuite identifier l'expression de l'approximant de Padé

$$R_{34} = \frac{x + a_3x^3}{b_0 + b_2x^2 + b_4x^4}$$

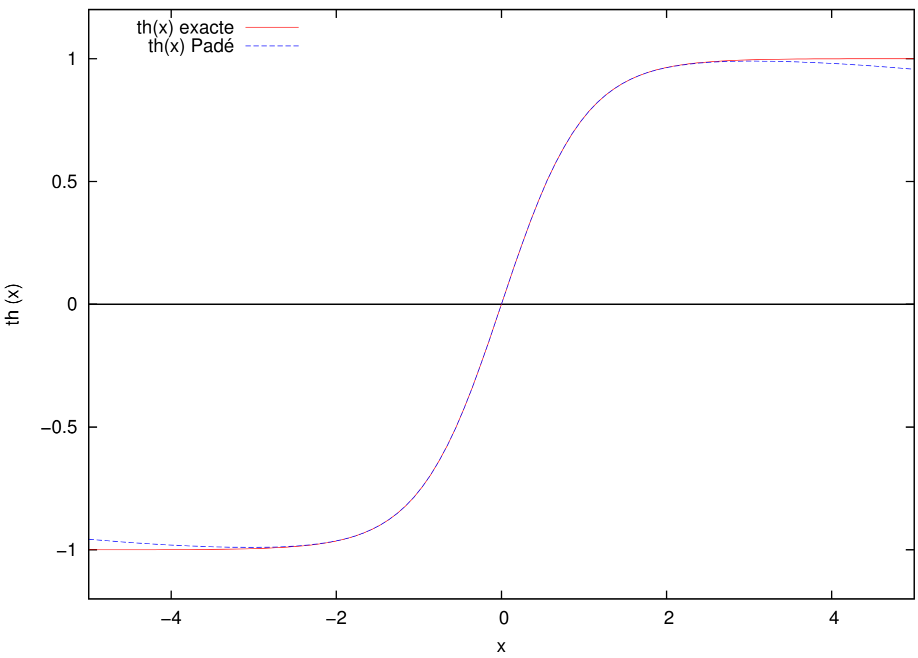
et le développement limité. On annule les coefficients des termes en x, x^2, x^3 et x^4, ce qui fournit les quatre équations qui déterminent les coefficients inconnus a_3, b_0, b_2, b_4 :

$$\begin{aligned}
1 &= b_0,\\
a_3 &= -\frac{1}{3}b_0 + b_2,\\
0 &= \frac{2}{15}b_0 - \frac{1}{3}b_2 + b_4,\\
0 &= \frac{-17}{315}b_0 + \frac{2}{15}b_2 - \frac{1}{3}b_4.
\end{aligned}$$

On trouve successivement $b_4 = 1/105$, $b_2 = 3/7$ et $a_3 = 2/21$, d'où l'expression de l'approximant :

$$R_{34} = \frac{21x + 2x^3}{21 + 9x^2 + \frac{1}{5}x^4}.$$

c) La figure ci-dessous vous montre la fonction et son approximation.


th(x) exacte
th(x) Padé
1
0.5
0
−0.5
−1
th (x)
−4
−2
0
2
4
x