Solution des problèmes du chapitre 3

6.11. On considère une méthode de quadrature élémentaire obtenue par interpolation d'une fonction $f \in \mathcal{C}^{l+2}([\alpha,\beta])$ en des points $\tau_j \in [\alpha,\beta]$, $0 \leqslant j \leqslant l$, et on utilise la méthode des différences divisées pour évaluer l'erreur d'interpolation $x \mapsto f(x) - p_l(x)$.

(a) Montrons par récurrence sur k la formule générale

$$f[x_0, x_1 \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}.$$

La formule est vraie pour $k = 0$ (le produit est alors vide et vaut 1 par convention). Pour $k = 1$, on a bien aussi

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Supposons la formule vraie à l'ordre $k-1$, $k \geqslant 1$. Alors par définition (voir II.1.3)

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1 \ldots, x_k] &= \frac{f[x_1, x_2 \ldots, x_k] - f[x_0, x_1 \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \\ &= \frac{1}{x_k - x_0}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{i>0, i\neq j}(x_j - x_i)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{i<k, i\neq j}(x_j - x_i)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{0\leqslant i\leqslant k, i\neq j}(x_j - x_i)}, \end{aligned}$$

en effet les termes $j = 0$ et $j = k$ proviennent respectivement des termes correspondants de l'avant dernière ligne, tandis que le coefficient des termes $f(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$ est donné par l'expression

$$\frac{1}{x_k - x_0}\left(\frac{1}{\prod_{i>0, i\neq j}(x_j - x_i)} - \frac{1}{\prod_{i<k, i\neq j}(x_j - x_i)}\right) = \frac{1}{x_k - x_0} \frac{(x_j - x_0) - (x_j - x_k)}{\prod_{0\leqslant i\leqslant k, i\neq j}(x_j - x_i)},$$

qui se simplifie comme indiqué. On voit alors que l'expression de $f[x_0, x_1 \ldots, x_k]$ figurant dans le membre de droite de l'identité est invariante par permutation des points x_i, comme il résulte de la commutativité de l'addition et de la multiplication des réels.

(b) La fonction

$$x \mapsto f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \int_0^1 f'(x_0 + t(x - x_0))\, dt$$

s'étend en une fonction de classe $\mathcal{C}^{l+1}$ sur $[\alpha, \beta]$ si l'on pose $f[x_0, x_0] = f'(x_0)$: cela résulte du théorème de dérivation sous le signe somme et du fait que f' est de classe $\mathcal{C}^{l+1}$. Par récurrence sur k, on voit que pour des points distincts $\tau_i \in [\alpha, \beta]$, la différence divisée $x \mapsto f[\tau_0, \ldots, \tau_k, x]$ s'étend également en une fonction de classe $\mathcal{C}^{l+1}$ sur $[\alpha, \beta]$. On a en effet

$$f[\tau_0, \ldots, \tau_k, x] = \frac{f[\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, x] - f[\tau_0, \tau_2, \ldots, \tau_k, x]}{\tau_1 - \tau_0},$$

comme il résulte de l'invariance par permutation en écrivant $f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x] = f[\tau_0, \tau_2, \ldots, \tau_k, x, \tau_1]$ et en appliquant la définition des différences divisées.

(c) Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ et tout $k = 0, 1, \ldots, l$, il existe $\xi_x \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$(*) \qquad \frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x] = \frac{1}{(k+2)!}\, f^{(k+2)}(\xi_x).$$

En effet, la remarque du II.1.3 permet de voir qu'on a en général une égalité $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(\xi)$, $\xi \in \,]\min(x_i), \max(x_i)[$. On observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x_0] &= \lim_{x_\nu \to x_0} \frac{f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x_\nu] - f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x_0]}{x_\nu - x_0} \\ &= \lim_{x_\nu \to x_0} f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x_0, x_\nu] \end{aligned}$$

pour toute suite $x_\nu \to x_0$, $x_\nu \neq x_0$. Or, en appliquant le résultat rappelé ci-dessus avec 2 points supplémentaires, on en conclut qu'il existe $\xi_\nu \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x_0, x_\nu] = \frac{1}{(k+2)!}\, f^{(k+2)}(\xi_\nu)$$

pour tout ν. Par compacité de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, on peut extraire une sous-suite convergente $\xi_\nu \to \xi_0 \in [\alpha, \beta]$ et à la limite, par continuité de $f^{(k+2)}$, on en déduit

$$\frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, x_0] = \frac{1}{(k+2)!}\, f^{(k+2)}(\xi_0),$$

ce qui démontre l'affirmation $(*)$.

(d) Si p_{l+1} est le polynôme d'interpolation aux points $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_l, x$, nous obtenons

$$f(x) - p_l(x) = p_{l+1}(x) - p_l(x) = \prod_{j=0}^{l} (x - \tau_j)\, f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_l, x]$$

d'après les résultats du II.1.3. L'erreur due à la formule de quadrature élémentaire par interpolation en $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_l$ est donc

$$E(f) = \int_\alpha^\beta \big(f(x) - p_l(x)\big)\,dx = \int_\alpha^\beta \prod_{j=0}^{l} (x - \tau_j)\, f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_l, x]\,dx.$$

(e) On suppose désormais $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$, on considère les points équidistants $\tau_j = -1 + jh$ $h = 2/l$, $0 \leqslant j \leqslant l$, et on pose

$$w(x) = \int_{-1}^{x} \prod_{j=0}^{l} (t - \tau_j)\,dt \quad \text{et} \quad I_k = w(\tau_{k+1}) - w(\tau_k), \quad k = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Supposons d'abord $l = 2n$ pair. Nous avons

$$I_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \prod_{j=0}^{l} (t - \tau_j)\,dt$$

et le signe du produit change en chaque racine τ_j. Le signe de I_k est donc alterné avec k (négatif pour $k = l - 1$, puisque seul le dernier terme $t - \tau_l$ est alors négatif ; le signe de I_k est donc $(-1)^{l-k} = (-1)^k$). Pour comparer I_k à I_{k-1}, on peut faire le changement de variable $t = u + h$, $u \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, et on a alors par décalage des racines $\tau_j = \tau_{j-1} + h$, d'où l'égalité

$$\prod_{j=0}^{l} (t - \tau_j) = \prod_{j=-1}^{l-1} (u - \tau_j) = \prod_{j=0}^{l} (u - \tau_j) \frac{u - \tau_{-1}}{u - \tau_l} = \prod_{j=0}^{l} (u - \tau_j) \frac{u + 1 + h}{u - 1},$$

et le quotient final est de valeur absolue $\leqslant 1$ si $u + 1 + h \leqslant 1 - u$, soit $u \leqslant -h/2$. Comme $u \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, il suffit que $\tau_k \leqslant -h$, c'est-à-dire $k \leqslant n - 1$. Mais par ailleurs, le changement de variables $t \mapsto -t$, $j \mapsto l - j$ donne $\tau_{l-j} = -\tau_j$, d'où $I_k = -I_{l-1-k} = -I_{2n-1-k}$, et a fortiori $|I_{2n-1-k}| = |I_k|$, en particulier $|I_n| = |I_{n-1}|$. Ceci montre que $k \mapsto |I_k|$ décroît (strictement) pour les indices successifs $k = 0, 1, \ldots, n-1$ et croît de nouveau pour les indices $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$.

Le produit $t \mapsto \prod_{0 \leqslant j \leqslant l} (t - \tau_j)$ est une fonction impaire (les racines autres que 0 sont 2 à 2 symétriques par rapport à 0). Il en résulte que $w(-1) = w(1) = 0$ et que w est une fonction paire. Pour $x \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ avec $\tau_{k+1} \leqslant 0$, on voit que

$$w(x) = I_0 + I_1 + \ldots + I_{k-1} + I'_k, \qquad I'_k = \int_{\tau_k}^{x} \prod_{0 \leqslant j \leqslant l} (t - \tau_j)\,dt$$

et I'_k est du même signe que I_k avec $|I'_k| \leqslant |I_k|$. L'argument usuel des sommes partielles de séries alternées montre que $w(x)$ est du signe de I_0, donc $w(x) > 0$ pour

$x \in]-1,1[$. Une intégration par parties dans l'expression de $E(f)$ obtenue au (d) donne

$$E(f) = \Big[w(x) f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_l, x]\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} w(x)\,\frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_l, x]\,dx,$$

et, compte tenu de ce que $w(-1) = w(1) = 0$, l'identité du (c) implique

$$(**) \qquad E(f) = -\frac{1}{(l+2)!}\int_{-1}^{1} w(x)\, f^{(l+2)}(\xi_x)\,dx.$$

Les fonctions mises en jeu sont continues (et même $\mathcal{C}^{l+1}$). La formule de la moyenne pour le poids $w(x) > 0$ montre qu'il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que

$$E(f) = -\frac{1}{(l+2)!}\, f^{(l+2)}(\eta)\, A \quad \text{où} \quad A = \int_{-1}^{1} w(x)\,dx > 0.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$A = [t\,w(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} t\,w'(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} t\prod_{j=0}^{l}(t-\tau_j)\,dt.$$

Le changement de variable $t = \frac{u}{n}$, $u \in [-n,n]$, $\tau_{n+j} = \frac{j}{n}$, $-n \leqslant j \leqslant n$, donne maintenant

$$A = -\frac{1}{n^{2n+3}}\int_{-n}^{n} u\prod_{j=-n}^{+n}(u-j) = -\frac{1}{n^{2n+3}}\int_{-n}^{n} u^2(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)\,du.$$

En prenant $f(x) = x^k$, $k \leqslant l+2$, on voit grâce à $(**)$ que l'erreur $E(f)$ est nulle pour $k \leqslant l+1$ et strictement négative (égale à $-A$) pour $k = l+1$. La méthode de Newton-Cotes NC_l est donc d'ordre $N = l+1$ exactement. On sait dans ces conditions que l'erreur s'exprime à l'aide du noyau de Peano $K_N = K_{l+1}$ par la formule

$$E(f) = \frac{1}{(l+1)!}\int_{-1}^{1} K_{l+1}(t) f^{(l+2)}(t)dt.$$

En prenant $f(x) = x^{l+2}$ il vient $E(f) = -A$ et $\int_{-1}^{1} K_{l+1}(t)\,dt = -A/(l+2)$.

(f) Supposons que le noyau de Peano ne soit pas de signe constant. C'est une fonction polynomiale par morceaux, donc les points où le signe change sont en nombre fini m. Il existe une fonction continue $g_\varepsilon \in \mathcal{C}([-1,1])$ comprise entre -1 et 1 telle que

$$g_\varepsilon(t) = \pm 1 \text{ ou } 0 = \text{signe de } K_{l+1}(t)$$

en dehors d'un intervalle de longueur ε/m autour de chaque point où le signe de K_{l+1} change. On en déduit

$$\int_{-1}^{1} K_{l+1}(t) g_\varepsilon(t)\,dt \geqslant \int_{-1}^{1} |K_{l+1}(t)|\,dt - C\varepsilon \quad \text{où} \quad C = \sup_{[-1,1]} |K_N|.$$

Choisissons une fonction f_ε telle que $f_\varepsilon^{(l+2)} = g_\varepsilon$. Alors l'erreur d'interpolation vérifierait d'une part $E(f_\varepsilon) = \frac{1}{(l+2)!} g_\varepsilon(\eta) A$, $\eta \in [-1,1]$, donc $|E(f_\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{(l+2)!} A$, et d'autre part

$$E(f_\varepsilon) = \frac{1}{(l+1)!} \int_{-1}^{1} K_{l+1}(t) g_\varepsilon(t) dt \geqslant \frac{1}{(l+1)!} \int_{-1}^{1} |K_{l+1}(t)|\,dt - \frac{1}{(l+1)!} C\varepsilon.$$

Cependant, si K_{l+1} change de signe, on a

$$\int_{-1}^{1} |K_{l+1}(t)|\,dt > \left| \int_{-1}^{1} K_{l+1}(t)\,dt \right| = \frac{1}{l+2} A,$$

ce qui est une contradiction pour ε assez petit. Par conséquent $K_{l+1}(t)$ est de signe constant et comme son intégrale est négative on en conclut que $K_{l+1}(t) \leqslant 0$ sur $[-1,1]$.

(g) Dans le cas où $l = 2n+1$ est impair avec un pas $h = \frac{2}{2n+1}$, on peut reprendre les calculs précédents et observer que l'on a après simplification de $(x - \tau_l)$:

$$f(x) - p_l(x) = \prod_{j=0}^{l-1} (x - \tau_j) \big(f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, x] - f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, \tau_l] \big).$$

On prend cette fois $w(x) = \int_{-1}^{x} \prod_{j=0}^{l-1} (t - \tau_j)\,dt$. L'erreur d'interpolation est alors donnée par

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{-1}^{1} \big(f(x) - p_l(x) \big)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} w'(x) \big(f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, x] - f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, \tau_l] \big)\,dx. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$E(f) = -\int_{-1}^{1} w(x) \frac{d}{dx} f[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, x]\,dx,$$

et on en déduit comme dans (f) (avec le point d'interpolation τ_l en moins) qu'il existe $\eta \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$E(f) = -\frac{1}{(l+1)!} f^{(l+1)}(\eta)\,A, \qquad A = \int_{-1}^{1} w(x)\,dx.$$

Il résulte de la question (f) que $w(x) > 0$ sur $]-1, 1-h[$: en effet $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}$ forment une subdivision de pas constant de $[-1, 1-h]$ en $2n$ intervalles, et on peut simplement faire un changement de variable affine pour ramener l'intervalle $[-1, 1-h]$ à $[-1, 1]$. On voit ainsi que $w(1-h) = 0$, avec une symétrie non évidente par rapport au point $-h/2$. Comme l'intégrande de $w(x)$ est positif aussi sur l'intervalle restant $]1-h, 1]$, on a encore $w(x) > 0$ sur $]1-h, 1]$. Les arguments de (f) et (g) restent applicables, au remplacement près de l par $(l-1)$, et on trouve ainsi que

$$E(f) = -\frac{1}{(l+1)!}\int_{-1}^{1} w(x)\, f^{(l+1)}(\xi_x)\, dx$$

pour une certaine fonction $\xi_x \in [-1, 1]$. La méthode est donc d'ordre l exactement. Le noyau de Peano est de signe constant, négatif ou nul, et on a

$$\int_{-1}^{1} K_l(t)\, dt = -\frac{1}{l+1}A, \qquad A = \int_{-1}^{1} w(x) dx > 0.$$

Enfin, une intégration par parties fournit

$$A = [(x-1)w(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x-1)w'(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} \prod_{j=0}^{l} (x-\tau_j)\, dx.$$

Le changement de variable et d'indice $t = (2u-1)/(2n+1)$, $u \in [-n, n+1]$, $\tau_{j+n} = (2j-1)/(2n+1)$, $-n \leqslant j \leqslant n+1$, fournit l'expression explicite

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2^{2n+3}}{(2n+1)^{2n+3}} \int_{-n}^{n+1} \prod_{j=-n}^{n+1} (u-j)\, du \\ &= \frac{2^{2n+3}}{(2n+1)^{2n+3}} \int_{-n}^{n+1} u(n+1-u)(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)\, du \end{aligned}$$

(sous cette forme, il n'est pas évident que $A > 0$!)