Exercice 3-1 : « Dédimensionnement » de l'équation des ondes

a) Soient $[a]$ et $[u]$ les dimensions des grandeurs a et u ; l'équation des ondes implique que

$$[a]^2[u]^2L^{-2} = [u]^2T^{-2}$$

d'où $[a] = LT^{-1}$; en d'autres termes, a est la vitesse de propagation de la quantité u.

b) D'après le théorème sur la dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\ell}\frac{\partial u}{\partial s}.$$

En dérivant une nouvelle fois, on trouve que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\ell^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}.$$

L'équation des ondes devient

$$\frac{a^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

c) La quantité ℓ/a a les dimensions d'un temps et donc $\tau = at/\ell$ est sans dimension. Comme u est fonction de t et que t s'exprime en fonction de τ, on calcule, comme en (b)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\ell}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

Appliquant cette règle une deuxième fois, il vient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\ell^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

si bien que l'équation des ondes devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

une expression sans dimension, puisque les variables s et τ sont sans dimension. De plus, le paramètre a, caractéristique de l'onde et du milieu dans lequel elle se propage, a disparu.