Exercice 3-3 : Un exemple de changement de système d'unités

a) Le module de la force de gravitation vaut $f = Gm_T m_S/R^2$; on peut donc écrire $G = R^2 f/m_T m_S$, ce qui permet d'établir les dimensions de la constante G, $[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$. D'après l'énoncé, le rapport des unités de longueur est

$$L = \frac{\text{unité nouvelle}}{\text{unité SI}} = 1{,}5 \times 10^{11};$$

le rapport des unités de masse vaut

$$M = 6 \times 10^{24}$$

et celui de unités de temps s'écrit

$$T = 3600 \times 24 \times 365 = 3\,153\,600.$$

Le rapport des unités de G vaut donc

$$K \equiv \frac{\text{nouvelle unité}}{\text{ancienne unité}} = (1{,}5 \times 10^{11})^3 \frac{1}{6\,10^{24}} \left(\frac{1}{3\,153\,600}\right)^2.$$

Les valeurs numériques de la constante sont dans le rapport inverse

$$\text{nouvelle valeur de } G = \text{ancienne valeur de } G/K = 118 \times 10^{-6}.$$

b) La méthode « artisanale » consiste à écrire l'équation du mouvement, supposé circulaire uniforme, de la Terre autour du Soleil. La force d'attraction, due à la gravitation, doit être égale à m_T fois l'accélération radiale

$$G\frac{m_T m_S}{R^2} = m_T \omega^2 R$$

avec $\omega = 2\pi/\tau$. On en tire

$$G = \frac{4\pi^3}{\tau^2}\frac{R^3}{m_S}.$$

Dans les nouvelles unités, $\tau' = 1$, $R' = 1$ et $m'_S = \frac{1}{3} \times 10^6$, d'où

$$G' = 4\pi^2 \times (3 \times 10^{-6}) = 118 \times 10^{-6}.$$