⇦ Retour au site web

Exercice 3-4 : « Dédimensionnement » de l'équation de van der Waals

En développant l'équation de van der Waals et en chassant v des dénominateurs, on trouve une équation cubique en v :

$$v^3 - \frac{pb + RT}{p} v^2 + \frac{a}{p} v - \frac{ab}{p} = 0.$$

Pour un certain jeu de valeurs v_c, p_c, T_c, cette équation admet une racine triple, c'est-à-dire qu'elle peut être mise sous la forme

$$(v - v_c)^3 = v^3 - 3v^2 v_c + 3v v_c^2 - v_c^3 = 0.$$

Il suffit d'identifier terme à terme ces deux formes, ce qui fournit les trois relations

$$\begin{aligned} \frac{p_c b + RT_c}{p_c} &= 3v_c, \\ \frac{a}{p_c} &= 3v_c^2, \\ \frac{ab}{p_c} &= v_c^3. \end{aligned}$$

Le rapport des deux dernières équations fournit la valeur $v_c = 3b$; en reportant dans la deuxième relation, on tire $p_c = a/(27b^2)$. Enfin, la première équation implique que $T_c = 8a/(27bR)$. On inverse ces relations pour trouver

$$b = \frac{1}{3} v_c \quad ; \quad a = 3 p_c v_c^2.$$

On remplace, dans l'équation d'état, p par $p^* p_c$, v par $v^* v_c$ et T par $T^* T_c$, pour obtenir

$$\left(p^* + \frac{3}{v^{*2}}\right)(3v^* - 1) = 8.$$

Les paramètres a et b, caractéristiques du gaz étudié, ont disparu.