Solution des problèmes du chapitre 4

5.3. On se propose d'étudier le comportement des itérées d'une fonction au voisinage d'un point fixe, dans le cas critique où la dérivée vaut 1 en ce point.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, et que φ admet un développement limité

$$(*) \qquad \varphi(x) = x - ax^k + x^k \varepsilon(x)$$

avec

$$(**) \qquad a > 0, \quad k > 1, \quad \lim_{x \to 0_+} \varepsilon(x) = 0.$$

(a) Sous l'hypothèse $(**)$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in [0, h]$ on ait $|\varepsilon(x)| \leqslant a/2$ et donc $a - \varepsilon(x) > 0$. Ceci entraîne d'après $(*)$ que $\varphi(x) = x - x^k(a - \varepsilon(x))$ vérifie $\varphi(x) < x$ pour tout $x \in \,]0, h]$. Si on choisit en outre h assez petit pour que $2ah^{k-1} < 1$, il vient

$$\varphi(x) = x - x^k(a - \varepsilon(x)) > x - 2ax^k = x(1 - 2ax^{k-1}) > 0 \quad \text{pour } x \in \,]0, h].$$

On voit alors que φ envoie $]0, h]$ dans $]0, h]$. La suite itérée $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ est donc bien définie et à valeurs dans $]0, h]$ pour tout $x_0 \in \,]0, h]$. Comme $x_{p+1} = \varphi(x_p) < x_p$, la suite (x_p) est décroissante et minorée par 0. Le théorème des suites monotones montre qu'elle converge vers une limite $\ell \in [0, h]$. La continuité de φ implique que $\varphi(\ell) = \ell$, et il résulte du fait que $\varphi(x) < x$ pour $x \in \,]0, h]$ que $\ell = 0$. Par conséquent (x_p) converge vers 0 pour tout valeur initiale $x_0 \in \,]0, x_0]$.

(b) On pose $u_p = x_p^m$ où $m \in \mathbb{R}$ (on supposera ici $m \neq 0$). Déterminons un équivalent de $u_{p+1} - u_p$ en fonction de x_p. On a

$$u_{p+1} - u_p = x_{p+1}^m - x_p^m = x_p^m \big((x_{p+1}/x_p)^m - 1 \big)$$

et il est clair que $x_{p+1}/x_p = \varphi(x_p)/x_p = 1 - x_p^{k-1}(a - \varepsilon(x_p)) \to 1$ quand $p \to +\infty$. Comme la dérivée en $t = 1$ de $t \mapsto t^m$ vaut m, il vient $t^m - 1 \sim m(t - 1)$ en $t = 1$. Par conséquent

$$u_{p+1} - u_p \sim x_p^m \times m(x_{p+1}/x_p - 1) \sim m x_p^m \times (-a x_p^{k-1}) = -am\, x_p^{m+k-1}.$$

(c) Le choix $m = 1 - k < 0$ donne $m + k - 1 = 0$ et d'après (b) on en déduit que $v_p = u_{p+1} - u_p$ possède une limite finie $\lambda = -am = a(k-1) > 0$. On va voir que ceci entraîne $u_p \sim \lambda p$ quand $p \to +\infty$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda - \varepsilon \leqslant v_p \leqslant \lambda + \varepsilon$ pour $p \geqslant p_0(\varepsilon)$. On en déduit que $u_p = u_{p_0} + \sum_{p_0 \leqslant q \leqslant p-1} v_q$ vérifie l'encadrement

$$u_{p_0} + (p - p_0)(\lambda - \varepsilon) \leqslant u_p \leqslant u_{p_0} + (p - p_0)(\lambda + \varepsilon) \quad \text{pour } p \geqslant p_0,$$

donc

$$\lambda - \varepsilon + \frac{u_{p_0} - p_0(\lambda - \varepsilon)}{p} \leqslant \frac{u_p}{p} \leqslant \lambda + \varepsilon + \frac{u_{p_0} - p_0(\lambda + \varepsilon)}{p}.$$

Si l'on choisit p_1 tel que

$$\frac{|u_{p_0}| + p_0(|\lambda| + \varepsilon)}{p_1} \leqslant \varepsilon,$$

on trouve $\lambda - 2\varepsilon \leqslant \frac{u_p}{p} \leqslant \lambda + 2\varepsilon$ pour $p \geqslant \max(p_0, p_1)$, ce qui entraîne bien que $u_p \sim \lambda p$ quand $p \to +\infty$. On obtient en définitive

$$x_p = u_p^{1/m} \sim (\lambda p)^{1/m} = \big(a(k-1)p\big)^{-1/(k-1)}$$

quand $p \to +\infty$.

(d) Pour $\varphi(x) = \sin x$, nous avons

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$

et on peut appliquer ce qui précède avec $a = \frac{1}{6}$ et $k = 3$. On trouve alors

$$x_p \sim (p/3)^{-1/2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{p}} \quad \text{quand } p \to +\infty\ ,$$

pour toute valeur initiale $x_0 > 0$. Pour la valeur initiale $x_0 = 1$ proche de l'équivalent trouvé lorsque p est petit (à savoir $p = 3$), on voit que $\sqrt{3}/\sqrt{p} < 10^{-5}$ pour $p > 3{\cdot}10^{10}$, donc il faudra plusieurs dizaines de milliards d'itérations pour atteindre $x_p < 10^{-5}$.