⇦ Retour au site web

Exercice 4-11 : Interpolation de Hermite

a) L'interpolation de Hermite fait intervenir, comme intermédiaires, les polynômes élémentaires de Lagrange qui s'écrivent, pour deux pivots :

$$\ell_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{-1}{\Delta}(x - x_1) \quad ; \quad \ell_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{\Delta}(x - x_0).$$

On calcule ensuite

$$\ell_0' = \frac{-1}{\Delta} \quad ; \quad \ell_1' = \frac{1}{\Delta}.$$

Nous formons ensuite, d'après les formules du §4.7 du texte, les polynômes $\bar{h}_i$:

$$\bar{h}_0 = \frac{1}{\Delta^2}(x - x_0)(x - x_1)^2 \quad ; \quad \bar{h}_1 = \frac{1}{\Delta^2}(x - x_0)^2(x - x_1).$$

et de même

$$h_0 = \frac{1}{\Delta^2}(x - x_1)^2[1 + \frac{2}{\Delta}(x - x_0)] \quad ; \quad h_1 = \frac{1}{\Delta^2}(x - x_0)^2[1 - \frac{2}{\Delta}(x - x_1)].$$

Le polynôme d'interpolation s'écrit alors

$$H(x) = f_0 h_0 + f_1 h_1 + f_0' \bar{h}_0 + f_1' \bar{h}_1.$$

b) On veut interpoler dans une table de $\sin x$ où x est en degré. Or cette fonction n'admet de dérivée simple que si l'argument est exprimé en radians. Nous écrirons donc

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{180} \quad ; \quad f'(x) = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180}$$

où x est en degrés.

Nous utiliserons les valeurs

x	30	45	60
f	0.5	?	0,8660254
f'	0,0151150		0,0087266

À partir de ces valeurs (très particulières), nous trouvons

$$h_0 = h_1 = 0{,}5 \quad ; \quad \bar{h}_0 = -\bar{h}_1 = 3{,}75$$

d'où nous tirons $\sin 45 \simeq 0{,}706969$, une erreur absolue de $1{,}4 \times 10^{-4}$.

c) Il faut résoudre l'équation $f(x) \equiv \cos x - x = 0$, sachant que $f' = -\sin x - 1$. Les rôles des variables dépendante et indépendante sont maintenant inversés, comme le montre la table (f^{-1} désigne la fonction inverse de f, dont la dérivée est $1/f'$) :

y	1	0	-0,4596977
$x = f^{-1}(y)$	0	?	1
$x' = 1/f'$	-1		-0,5430441

Nous cherchons la valeur de x, soit x^* qui annule y. Nous partons de la formule générale

$$\begin{aligned}
x &= x_0 \left(\frac{y-y_1}{y_1-y_0}\right)^2 \left(1+2\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right) \\
&+ x_1 \left(\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 \left(1-2\frac{y-y_1}{y_1-y_0}\right) \\
&+ \frac{1}{f'_0} \left(\frac{y-y_1}{y_1-y_0}\right)^2 (y-y_0) \\
&+ \frac{1}{f'_1} \left(\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 (y-y_1).
\end{aligned}$$

Nous faisons $y = 0$ dans cette expression pour obtenir

$$\begin{aligned}
x^* &= x_0 \left(\frac{y_1}{y_1-y_0}\right)^2 \left(1-2\frac{y_0}{y_1-y_0}\right) \\
&+ x_1 \left(\frac{y_0}{y_1-y_0}\right)^2 \left(1+2\frac{y_1}{y_1-y_0}\right) \\
&+ \frac{1}{f'_0} \left(\frac{y_1}{y_1-y_0}\right)^2 (-y_0) \\
&+ \frac{1}{f'_1} \left(\frac{y_0}{y_1-y_0}\right)^2 (-y_1).
\end{aligned}$$

En substituant les valeurs numériques, nous trouvons $x^* = 0{,}74695$, une première approximation ($\cos x^* = 0{,}73376$) que l'on pourrait améliorer en reprenant le calcul à partir des deux meilleures valeurs de x, x^* et x_1.