Retour au site web

Exercice 4-5 : Interpolation par les différences finies et la formule de Newton

a) Voici une table de la fonction $\sqrt{x}$ et de ses cinq premières différences latérales.

x	f	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
1,0	1,0000					
		0,0488				
1,1	1,0488		−0,0022			
		0,0466		0,0003		
1,2	1,0954		−0,0019		−0,0001	
		0,0447		0,0002		0,0000
1,3	1,1402		−0,0017		−0,0000	
		0,0430		0,0002		0,0000
1,4	1,1832		−0,0015		−0,0000	
		0,0415		0,0001		0,0000
1,5	1,2247		−0,0014		−0,0000	
		0,0402		0,0001		0,0000
1,6	1,2649		−0,0012		−0,0000	
		0,0389		0,0001		0,0000
1,7	1,3038		−0,0011		−0,0000	
		0,0378		0,0001		0,0000
1,8	1,3416		−0,0010		−0,0000	
		0,0368		0,0001		
1,9	1,3784		−0,0010			
		0,0358				
2,0	1,4142					

Le programme utilisé est listé ci-dessous.

```
//confection d'une table de différences latérales
//et interpolation
//
blanc = "                    ";
nval = input("nombre de valeurs de la fonction: ");
dmax = input("ordre maximal des différences: ");
xi = input("valeur initiale de l''argument: ");
h = input("intervalle tabulaire: ");
mprintf("\n\n");
table = zeros(nval,dmax+1);
x = xi;
for i = 1:nval
    table(i,1) = sqrt(x);
 x = x + h;
end
for j = 2:(dmax+1)
  for i = j:nval
 table(i,j) = table(i,j-1) - table(i-1,j-1);
  end
end
x = xi;
for i = 1:nval
```

```
  //lignes impaires
  k = 1; l = i;
  mprintf("%4.1f",x);
  while (k <= dmax + 1) & (l <= nval) do
    if k <= l
   mprintf("%12.4f",table(l,k))
 end
 mprintf(blanc);
 k = k+2; l = l+1;
  end
  mprintf("\n");
  //lignes paires
  x = x+h;
  k = 2; l = i+1;
  mprintf("      ");
  while (k <= dmax +1) & (l <= nval) do
    if k <= l
    mprintf("%s%12.4f",blanc,table(l,k))
 end
 k = k+2;l = l+1;
  end
  mprintf("\n");
end
```

Scilab effectue tous ses calculs avec 14 chiffres significatifs ; il n'y a donc pratiquement pas d'erreur d'arrondi sur les valeurs intermédiaires. Ce sont les valeurs affichées qui sont arrondies à cause de l'instruction `mprintf("%12.4f",table(l,k))`. Vous pouvez vérifier qu'arrondir f avant de calculer les différences latérales implique que les différences d'ordre supérieur à trois soient dénuées de signification.

b) Cherchons à majorer l'erreur de méthode pour une interpolation linéaire, sur l'intervalle [1,2; 1,3] par exemple. On sait que

$$|f - p_{0,1}| < \frac{1}{2} \sup |(x - x_0)(x - x_1) f''(x)|$$

avec $f''(x) = -1/4x^{-3/2}$. Sur l'intervalle considéré, on a $|f''| < 1/4$ et $|\pi(x)| < h^2/4 = 0{,}0025$ ($h = 0{,}1$ est l'intervalle tabulaire). Nous avons donc

$$|f - p_{0,1}| < \varepsilon_1 = 3 \times 10^{-4}.$$

L'erreur estimée est trois fois supérieure aux erreurs d'arrondi : il paraît plus raisonnable de pratiquer une interpolation à trois points pour ne pas perdre de précision. Le polynôme $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ n'est jamais supérieur à 4×10^{-4} en valeur absolue sur le segment [1,2; 1,4] et la dérivée $f^{(3)} = (-1/4)(-3/2)x^{-5/2}$ est certainement inférieure à 3/8 sur le même intervalle.Par conséquent, l'erreur de troncation est majorée par

$$\varepsilon_2 = 2{,}5 \times 10^{-5}.$$

Elle est cette fois inférieure à l'erreur d'arrondi sur les valeurs de la table.

Nous calculons

$$\begin{aligned} p_{0,1,2}(1{,}24) &= 1{,}0954 + 0{,}4 \times 0{,}0447 + \frac{1}{2} 0{,}4 \times (0{,}4 - 1) \times (-0{,}0022) \\ &= 1{,}1135 \end{aligned}$$

pour une valeur exacte $\sqrt{1{,}24} = 1{,}11355$. Un calcul tout à fait analogue donne $p(1{,}86) = 1{,}3638$ alors que $\sqrt{1{,}86} = 1{,}36382$.

c) Utilisons la table précédente pour trouver la valeur de $(1{,}35)^2$ par interpolation linéaire inverse. Les valeurs de f jouent le rôle d'arguments (inégalement répartis) et les valeurs de x jouent le rôle de valeurs d'une fonction $g(z)$, selon la table

z	1,3416	1,35	1,3784
$g(z)$	1,8	?	1,9

La formule de Lagrange donne

$$p = \frac{1{,}35 - 1{,}3784}{1{,}3416 - 1{,}3784} 1{,}8 + \frac{1{,}35 - 1{,}3416}{1{,}3784 - 1{,}3416} 1{,}9 = 1{,}8228.$$

On majore comme précédemment l'erreur d'interpolation, en notant que $g(z) = z^2$, $g' = 2z$, $g'' = 2$. On trouve une borne supérieure de l'erreur sur cet intervalle de $3{,}4 \times 10^{-4}$ ce qui justifierait le recours à une interpolation quadratique.