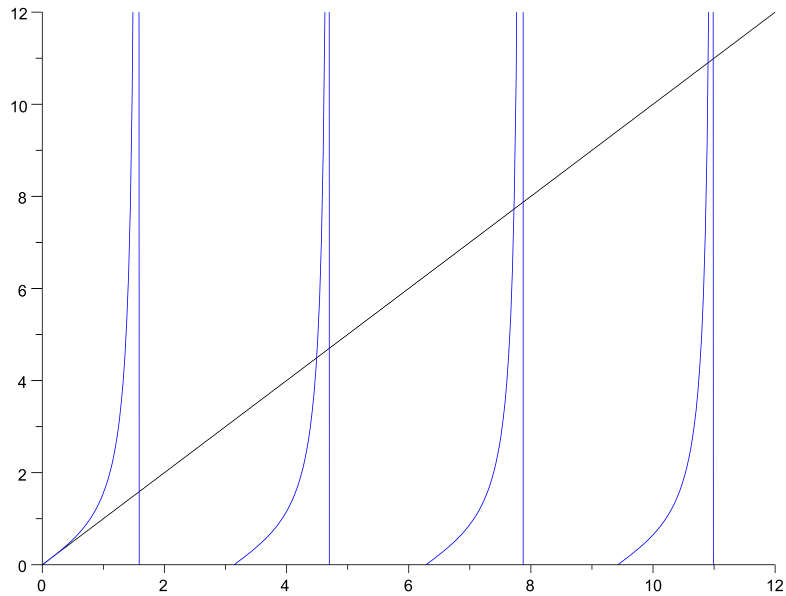
Retour au site web

Exercice 5-4 : L'équation tg$(x) = x$



La figure ci-dessus permet d'estimer la position des racines, toutes proches mais inférieures à $(2n+1)\pi/2, n = 1,2,\ldots$ Au voisinage d'une solution, la dérivée de $\operatorname{tg} x$, $1/\cos^2 x$, est toujours supérieure à 1, ce qui exclut la méthode d'itération (du point fixe). Les autres méthodes ne convergent que si les approximations initiales sont très bonnes mais toujours inférieures à $(2n+1)\pi/2$, puisque la fonction doit être définie et continue dans l'intervalle de recherche.

L'astuce suivante permet de transformer l'équation de départ pour pouvoir appliquer facilement la méthode du point fixe. Posons

$$x_n \equiv (2n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n.$$

L'équation à résoudre devient

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n = \operatorname{tg}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right] = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right],$$

à cause de la périodicité de la fonction tangente. Inversons cette équation :

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n = \operatorname{arctg}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right],$$

une équation non-linéaire en ε_n, facile à résoudre puisque la dérivée de la fonction arctangente est toujours inférieure à 1. En outre, cette fonction n'est pas périodique, ce qui simplifie la recherche de la racine. Il faut donc itérer l'équation

$$\varepsilon_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - \varepsilon_n\right),$$

après avoir choisi une valeur de n.

On peut aussi poser

$$x_n = n\pi + \theta_n$$

qui conduit, par le même raisonnement, à l'itération

$$\theta_n = \operatorname{arctg}(n\pi + \theta).$$

Ainsi pour $n = 2$, on trouve la suite : $\theta = 0$; 1,4129651 ; 1,4415852 ; 1,4420586 ; 1,4420664 ; 1,4420665 ; 1,4420665, d'où $x_2^* = 7{,}7252518$ et $\operatorname{tg} x_2^* = 7{,}7252518$.