

Exercice 5-7 : Schéma de Horner et algorithme de Newton

a) Appliquons l'algorithme de Horner pour les trois valeurs proposées ; nous obtenons les tableaux de valeurs suivants :

1	1	-3	-2
	$2 \times 1 + 1$	$2 \times 3 - 3$	$2 \times 3 - 2$
1	3	3	4

1	1	-3	-2
	$1,5 \times 1 + 1$	$1,5 \times 2,5 - 3$	$1,5 \times 0,75 - 2$
1	2,5	0,75	-0,875

1	1	-3	-2
	$-0,5 \times 1 + 1$	$-0,5 \times 0,5 - 3$	$-0,5 \times -3,25 - 2$
1	0,5	-3,25	-0,375

La valeur numérique du polynôme apparaît en gras.

b) Nous savons déjà que $p(1,5) = -0,875$; nous calculons ensuite $p'(1,5) = 6,75$. Une première itération de la méthode de Newton donne $x^{(1)} = x^{(0)} - p'(x^{(0)})/p(x^{(0)})$ soit $x^{(1)} = 1,5 + 0,875/6,75 = 1,6296296$. Pour aller plus loin, il vaut mieux programmer le schéma de Horner (voir le livre § 5.7.4) et la méthode de Newton. Nous trouvons ensuite $p(x^{(1)}) = 0,0945994$, $p'(x^{(1)}) = 8,2263374$ et $x^{(2)} = 1,6181301$ puis $x^{(3)} = 1,618034$.

c) La division de $p(x)$ par $x + 2$ fournit comme quotient le trinôme $x^2 - x - 1$ dont les racines sont $(1 \pm \sqrt{5})/2$ soit, respectivement 1,618034 et -0,6180340.