Solution des problèmes du chapitre 6

5.11. On étudie ici une méthode alternative pour déterminer l'équation de la chaînette.
Dans un plan vertical Oxy assimilé à $\mathbb{R}^2$ (où Oy est la direction verticale pointant vers le haut), on considère un fil souple de longueur $\ell > 0$ dont les extrémités sont fixées à des points de même hauteur, notés $(-a, 0)$ et $(a, 0)$, avec $a > 0$. La position d'équilibre du fil est le graphe d'une fonction f qui minimise l'énergie potentielle $P(f) = \int gy\,dm$ sous la contrainte de longueur $L(f) = \int ds = \ell$. On a plus précisément $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dm = \mu\,ds$ où μ est la masse linéique, d'où

$$L(f) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\ , \qquad P(f) = \mu g \int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\ ,$$

On considère l'espace de Banach

$$E = \Big\{ f \in \mathcal{C}^1([-a, a], \mathbb{R}) \,\Big|\, f(-a) = f(a) = 0 \Big\}\ ,$$

muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x\in[-a,a]} |f(x)| + \sup_{x\in[-a,a]} |f'(x)|\ .$$

Les fonctionnelles L, P définissent des applications L, $P : E \to \mathbb{R}$.

(a) Calculons les différentielles respectives de L et P en tout point $f \in E$. Pour cela, on évalue $L(f + h) - L(f)$ et $P(f + h) - P(f)$ à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2. On est amené à estimer les différences

$$\begin{aligned}\delta_L(x) &= \sqrt{1 + (f'(x) + h'(x))^2} - \sqrt{1 + f'(x)^2},\\ \delta_P(x) &= (f(x) + h(x))\sqrt{1 + (f'(x) + h'(x))^2} - f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}.\end{aligned}$$

Pour la différence $\delta_L(x)$, la fonction $g(t) = \sqrt{1 + t^2}$ vérifie $g'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $g''(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$, de sorte que $g''(t) \leqslant 1$ pour tout t. La première différence s'écrit alors

$$\delta_L(x) = h'(x)g'(f'(x)) + \frac{1}{2}h'(x)^2 g''\big(f'(x) + \theta(x)h'(x)\big)$$

avec $\theta(x) \in \,]0, 1[$. On a d'autre part

$$\delta_P(x) = h(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} + f(x)\delta_L(x) + h(x)\delta_L(x).$$

En séparant les termes linéaires et les termes d'erreur, on en déduit

$$dL(f)(h) = \int_{-a}^{a} \frac{h'(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\,dx\ ,$$
$$dP(f)(h) = \mu g \int_{-a}^{a} h(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx + f(x)\frac{h'(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\,dx,$$

avec des termes d'erreur qui valent

$$\text{(pour } dL\text{)} \qquad \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}h'(x)^2 g''\big(f'(x)+\theta(x)h'(x)\big)\,dx$$
$$\text{(pour } dP\text{)} \qquad \int_{-a}^{a} \Big(f(x)\frac{1}{2}h'(x)^2 g''\big(f'(x)+\theta(x)h'(x)\big) + h(x)\delta_L(x)\Big)dx$$

Dans le cas de dL, on voit grâce à l'estimation $0 \leqslant g'' \leqslant 1$ que le terme d'erreur est majoré par

$$2a \times \frac{1}{2}\|h'\|_\infty^2 \leqslant a\|h\|^2 = o(\|h\|).$$

Dans le cas de dP, on a un premier terme d'erreur qui est majoré par $a\|f\|\,\|h\|^2$ d'après ce qui précède, et un terme supplémentaire $\int_{-a}^{a} h(x)\delta_L(x)\,dx$. Or $h(x)\delta_L(x)$ est la somme d'un terme $h(x)\frac{h'(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$ majoré par $\|h\|^2\|f\|$, plus un nouveau terme d'erreur encore « plus petit »

$$\int_{-a}^{a} h(x)\frac{1}{2}h'(x)^2 g''\big(f'(x)+\theta(x)h'(x)\big)\,dx$$

majoré par $a\|h\|^3$. On en déduit que L et P sont bien différentiables, avec les expressions données précédemment pour les différentielles. Sous l'hypothèse que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et compte tenu des conditions $h(a) = h(-a) = 0$ pour $h \in E$, on peut effectuer une intégration par parties pour obtenir

$$dL(f)(h) = -\int_{-a}^{a} h(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right)dx\ ,$$
$$dP(f)(h) = \mu g \int_{-a}^{a} h(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx - h(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right)dx.$$

(b) On suppose $\ell > 2a$. la chaînette réalise le minimum de $P(f)$ sous la contrainte $L(f) = \ell$, pour $f \in E$. Il s'agit d'un problème « d'extremas liés ». Si l'infimum existe et s'il est atteint en un point $f \in E \cap \mathcal{C}^2([-a,a])$, la condition $dL(f)(h) = 0$ implique $dP(f)(h) = 0$, donc les formes linéaires associées satisfont la condition de proportionnalité $dP(f)(h) = \lambda dL(f)(h)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), d'après le théorème des multiplicateurs de

Lagrange. Comme cette égalité doit être vraie pour toute fonction h, on en déduit que f satisfait l'équation différentielle

$$\sqrt{1+f'(x)^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right) = c\,\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right)$$

avec $c = \frac{\lambda}{\mu g}$. En omettant la variable x pour simplifier, on trouve la condition

$$\sqrt{1+f'^2} - \frac{ff''+f'^2}{\sqrt{1+f'^2}} + \frac{ff'^2f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = c\left(\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} - \frac{f'^2f''}{(1+f'^2)^{3/2}}\right).$$

En multipliant cette expression par $(1+f'^2)^{3/2}$, on obtient la condition équivalente

$$(1+f'^2)^2 - (1+f'^2)(ff''+f'^2) + ff'^2f'' = c\big(f''(1+f'^2) - f'^2f''\big).$$

Ceci se simplifie (quelque peu miraculeusement !) en

$$(1+f'^2)(1-ff'') + ff'^2f'' = cf'',$$

soit encore

$$cf'' = 1 + f'^2 - ff''.$$

La fonction $g = f + c$ vérifie alors $gg'' = 1 + g'^2$, ce qui peut s'écrire aussi

$$\frac{g'g''}{1+g'^2} = \frac{g'}{g}$$

(on notera que g ne peut s'annuler). Cette égalité s'intègre sous la forme

$$\frac{1}{2}\ln(1+g'^2) = \ln|g| + C,$$

soit encore $1 + g'^2 = b^2g^2$ où $b = e^C$ est une constante positive. On a une solution constante $g(x) = \frac{1}{b}$, $g'(x) = 0$, tandis que pour $g' \neq 0$ il vient

$$\frac{g'}{\sqrt{b^2g^2-1}} = \varepsilon = \pm 1,$$

par conséquent $\frac{1}{b}\arg\cosh(b|g(x)|) = \pm x$. Il s'ensuit que $g(x) = \pm\frac{1}{b}\cosh(bx)$, d'où

$$f(x) = \pm\frac{1}{b}\cosh(bx) - c.$$

On notera que la continuité des fonctions mises en jeu impose que le signe $\pm$ ne dépende pas de la valeur de la variable x). La condition $f(a) = 0$ implique

$$f(x) = \pm\frac{1}{b}\big(\cosh(bx) - \cosh(ab)\big).$$

La solution g constante donnerait $f(x) = 0$ identiquement, d'où une longueur $L(f) = 2a$, alors qu'on a supposé $\ell > 2a$. Le signe initial figurant dans $f(x)$ doit également être $+1$, sinon on obtient une solution non physiquement réaliste $f(x) > 0$ pour $x \in \,]-a, a[$, qui correspond en fait à un maximum de $P(f)$ au lieu d'un minimum (noter que par changement de f en $-f$, on a $P(-f) = -P(f)$). Il reste à relier les constantes a, b, ℓ. Pour cela on calcule

$$L(f) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \sinh(bx)^2}\, dx = \int_{-a}^{a} \cosh(bx)\, dx = \frac{2}{b}\sinh(ab),$$

et la contrainte $L(f) = \ell$ donne la solution cherchée

$$f(x) = \frac{1}{b}\big(\cosh(bx) - \cosh(ab)\big) \quad \text{où } b \text{ est tel que} \quad \frac{2}{b}\arg\sinh(ab) = \ell.$$

Il existe une valeur unique de b vérifiant la dernière condition, car par convexité de sinh sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $b \mapsto \frac{2}{b}\sinh(ab)$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et y varie de $2a$ à $+\infty$.

5.12.** On appelle métrique de Poincaré du disque unité $D = \{|z| < 1\}$ du plan complexe la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}, \qquad z = x + iy.$$

(a) Avec les notations du § 4.4, l'énergie d'un chemin $\gamma : [a, b] \to D$ s'exprime sous la forme

$$E(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_q^2\, dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|^2}{(1 - |\gamma(t)|^2)^2}\, dt = \int_a^b \frac{\gamma'(t)\overline{\gamma'(t)}}{(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)})^2}\, dt.$$

En changeant γ en $\gamma + h$, on voit que la différentielle de l'énergie est donnée par

$$E(\gamma) \cdot h = 2\,\mathrm{Re} \int_a^b \left(\frac{\gamma'(t)}{\big(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)}\big)^2}\overline{h'(t)} + 2\frac{\gamma(t)\gamma'(t)\overline{\gamma'(t)}}{\big(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)}\big)^3}\overline{h(t)} \right) dt,$$

en effet les termes apparaissent par paires de termes conjugués et $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$. En intégrant par parties le premier terme de l'intégrande et en utilisant le fait que $h(a) = h(b) = 0$, il vient

$$E(\gamma) \cdot h = 2\,\mathrm{Re} \int_a^b \left(-\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\big(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)}\big)^2}\overline{h(t)} + 2\frac{\gamma(t)\gamma'(t)\overline{\gamma'(t)}}{\big(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)}\big)^3}\overline{h(t)} \right) dt.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout h, les géodésiques, à savoir les points critiques de l'énergie, sont les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\big(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)}\big)^2} + 2\frac{\gamma(t)\gamma'(t)\overline{\gamma'(t)}}{\big(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)}\big)^3} = 0$$

En développant la dérivée du premier terme et en multipliant par $\big(1-\gamma(t)\overline{\gamma(t)}\big)^2$, on voit après simplification que l'équation des géodésiques peut se récrire

$$(*) \qquad \gamma''(t)+\frac{2\gamma'(t)^2\overline{\gamma(t)}}{1-\gamma(t)\overline{\gamma(t)}}=0.$$

(b) Il est facile de voir que le chemin $\gamma(t)=\tanh(kt)$ (qui décrit le diamètre $]-1,1[$ du disque) est solution de l'équation pour tout $k\in\mathbb{R}_+^*$, en effet $\gamma'(t)=k(1-\tanh(kt)^2)$ et $\gamma''(t)=-2k^2\tanh(kt)(1-\tanh(kt)^2)$.

(c) Si $t\mapsto\gamma(t)$ est solution, alors $t\mapsto\lambda\gamma(t)$ est encore solution pour tout nombre complexe λ de module 1. En effet par substitution $\gamma\mapsto\lambda\gamma$ dans $(*)$, $\gamma''(t)$ est multiplié par λ, $2\gamma'(t)^2\overline{\gamma(t)}$ est multiplié par $\lambda^2\overline{\lambda}=\lambda$, et $1-\gamma(t)\overline{\gamma(t)}$ reste inchangé.

On vérifie maintenant que pour toute solution γ de $(*)$ et toute homographie complexe h_a de la forme

$$h_a(z)=\frac{z+a}{1+\overline{a}z},\qquad a\in D,$$

la composée $h_a\circ\gamma$ est également solution de $(*)$. Ceci démontrera en fait que les géodésiques sont invariantes par les automorphismes holomorphes $z\mapsto\lambda\frac{z+a}{1+\overline{a}z}$ du disque unité. On a d'abord

$$h_a'(z)=\frac{(1+\overline{a}z)-\overline{a}(z+a)}{(1+\overline{a}z)^2}=\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2},\qquad h_a''(z)=-2\overline{a}\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^3}$$
$$1-|h_a(z)|^2=\frac{|1+\overline{a}z|^2-|z+a|^2}{|1+\overline{a}z|^2}=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1+\overline{a}z|^2},$$

car les doubles produits $\overline{a}z+a\overline{z}$ figurant au numérateur s'auto-détruisent. Ceci donne

$$\begin{aligned}(h_a\circ\gamma)'(t)&=h_a'(\gamma(t))\gamma'(t)=\frac{(1-|a|^2)\gamma'(t)}{(1+\overline{a}\gamma(t))^2},\\ (h_a\circ\gamma)''(t)&=h_a'(\gamma(t))\gamma''(t)+h_a''(\gamma(t))\gamma'(t)^2\\ &=\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}\gamma(t))^2}\gamma''(t)-2\overline{a}\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}\gamma(t))^3}\gamma'(t)^2,\\ \frac{(h_a\circ\gamma)'(t)^2\overline{(h_a\circ\gamma)(t)}}{1-|h_a\circ\gamma(t)|^2}&=\frac{(1-|a|^2)^2\gamma'(t)^2(\overline{\gamma(t)}+\overline{a})}{(1+\overline{a}\gamma(t))^4(\overline{1+\overline{a}\gamma(t)})}\,\frac{|1+\overline{a}\gamma(t)|^2}{(1-|a|^2)(1-|\gamma(t)|^2)}\\ &=\frac{(1-|a|^2)\gamma'(t)^2(\overline{\gamma(t)}+\overline{a})}{(1+\overline{a}\gamma(t))^3(1-|\gamma(t)|^2)},\end{aligned}$$

de sorte qu'on a bien (après un calcul pénible !)

$$(h_a\circ\gamma)''(t)+\frac{2(h_a\circ\gamma)'(t)^2\overline{(h_a\circ\gamma)(t)}}{1-|h_a\circ\gamma(t)|^2}=0.$$

(d) On rappelle que les automorphismes holomorphes du disque unité sont les homographies préservant le cercle unité, et sont donnés par l'une ou l'autre des formules

$$\varphi(z) = h_a(\lambda z) = \lambda h_b(z) \quad \text{avec } a = \lambda b,\ |\lambda| = 1.$$

Considérons le chemin tel que $\gamma(t) = h_a(\lambda \tanh(kt))$, $a \in D$, $|\lambda| = 1$, $k \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question (c), c'est un arc de géodésique. De plus $\gamma(0) = h_a(0) = a$ et $\gamma'(0) = h_a'(0) \times \lambda k = \lambda k(1 - |a|^2)$. On voit ainsi que $\gamma(0) = a$ est un point quelconque de D et que $\gamma'(0)$ est un point quelconque de $\mathbb{C}$, puisque k et λ peuvent être choisis pour ajuster respectivement le module et l'argument. Le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique car les coefficients de $(*)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$). On a donc bien ainsi trouvé l'unique géodésique de données initiales $\gamma(0) = a \in D$ et $\gamma'(0) = b \in \mathbb{C}$, il n'y en a pas d'autres.

(e) D'après (c) et (d) les trajectoires des géodésiques sont les images par les homographies h_a des diamètres du disque. Les diamètres du disque sont orthogonaux aux cercle unité $|z| = 1$, et comme les automorphismes du disque sont des transformations conformes, l'orthogonalité est préservée. Toutes les géodésiques sont donc orthogonales au cercle unité. Mais il est classique (et on peut vérifier aisément) que l'image d'une droite par une homographie est une droite ou un cercle, les géodésiques sont donc des arcs de cercle orthogonaux au cercle unité.