J.-P. Grivet

⇦ Retour
au site web

Exercice 6-1 : Rappels d'algèbre linéaire

Le vecteur $\boldsymbol{x}$ peut être considéré comme une matrice à 3 lignes et 1 colonne, tandis que $\boldsymbol{y}^T$ est une matrice à 1 ligne et 3 colonnes. Appliquons la définition du produit de matrices (ligne par colonne) :

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [a, b, c] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix}.$$

Chaque vecteur colonne est proportionnel au vecteur $\boldsymbol{x}$: l'espace engendré par les vecteurs colonnes est à une dimension, le rang est 1.

Soit $\boldsymbol{r} = [u, v, w]^T$ un vecteur quelconque. Nous calculons

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{r} = \left[\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{r}\right]\boldsymbol{x}.$$

L'expression entre crochets est le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{r}$, le nombre $au+bv+wc$. L'image de $\boldsymbol{P}$ est l'ensemble des vecteurs proportionnels à $\boldsymbol{x}$.

Calculons $\boldsymbol{P}^2$ à partir de la définition de $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{x}[\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}]\boldsymbol{y}^T = [\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}][\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T] = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}.$$

En effet, le produit est associatif et l'expression $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$ est un nombre, le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, soit $a + 2b + 3c$.