J.-P. Grivet

⇦ Retour
au site web

Exercice 6-2 : Inverse d'une matrice triangulaire inférieure

Étant donnée la structure triangulaire inférieure de $\boldsymbol{L}$, la solution générale du système linéaire $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ s'écrit

$$x_i = \frac{1}{\ell_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} x_j\right].$$

En tenant compte de la structure particulière du second membre, nous trouvons

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\ell_{11}} b_1 = 0, \\
x_2 &= \frac{1}{\ell_{22}} [b_2 - \ell_{21} x_1] = 0, \\
\ldots \\
x_k &= \frac{b_k}{\ell_{kk}}.
\end{aligned}$$

Construire l'inverse de $\boldsymbol{L}$ revient à résoudre N systèmes linéaires tels que

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{e}^{(k)}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{y}^{(k)}$ sont les colonnes de $\boldsymbol{L}^{-1}$. Nous savons que $\boldsymbol{L}$ est régulière et triangulaire inférieure tandis que les $k-1$ premières composantes de $\boldsymbol{e}^{(k)}$ sont nulles. Le résultat précédent s'applique : les $k-1$ premières composantes de $\boldsymbol{y}^{(k)}$ seront également nulles. Une fois assemblés, les vecteurs $\boldsymbol{y}^{(k)}$ formeront une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont donnés par l'expression

$$\boldsymbol{L}^{-1}|_{kk} = \frac{1}{\ell_{kk}}.$$