Retour au site web

Exercice 6-4 : Matrices de Frobenius

a) L'expression

$$\boldsymbol{f}(k,\ell,x)|_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{ik}\delta_{\ell j}x$$

répond à la question. Le premier terme détermine les éléments de la diagonale. Le second terme représente l'unique élément extradiagonal : pour que ce terme soit non nul, il faut que l'indice de ligne i soit identique à k et que l'indice de colonne j soit égal à ℓ.

b) Formons l'élément de matrice i,j du produit :

$$\begin{aligned} \left|\boldsymbol{f}(k,\ell,x)\boldsymbol{f}(k',\ell,y)\right|_{ij} &= \sum_{p=1}^{n} \boldsymbol{f}(k,\ell,x)|_{ip}\boldsymbol{f}(k',\ell,y)|_{pj} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left[\delta_{ip}\delta_{pj} + x\delta_{ik}\delta_{lp}\delta_{pj} + y\delta_{pk'}\delta_{\ell j}\delta_{ip} + xy\delta_{ik}\delta_{\ell p}\delta_{pk'}\delta_{\ell j}\right] \\ &= \delta_{ij} + x\delta_{ik}\delta_{\ell j} + y\delta_{\ell j}\delta_{ik'} + xy\delta_{ik}\delta_{\ell k'}\delta_{\ell j}. \end{aligned}$$

Considérons par exemple la première somme :

$$\sum_{p=1}^{n} \delta_{ip}\delta_{pj}.$$

Pour que l'un des termes soit non nul, il faut que $i = p$ et $p = j$; ceci n'est possible que si $i = j$. Cette somme se réduit donc au seul terme δ_{ij}. Un raisonnement analogue s'applique aux autres termes. Dans le terme en xy, on a toujours $k' > \ell$ et donc $\delta_{\ell k'} = 0$. Finalement

$$\left|\boldsymbol{f}(k,\ell,x)\boldsymbol{f}(k',\ell,y)\right|_{ij} = \delta_{ij} + x\delta_{ik}\delta_{\ell j} + y\delta_{ik'}\delta_{\ell j}.$$

La matrice produit contient l'élément x en ligne k et colonne ℓ et l'élément y dans la même colonne mais en ligne k'.