Exercice 7-1 : Polynômes de Tschebychef

a)

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(0) = 1, \\ T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x, \\ T_2(x) &= \cos(2\arccos x) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta \\ &= x(2x^2 - 1) - 2x(1 - x^2) = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq \theta \leq \pi$.

b) Relation de récurrence
Nous savons que

$$\cos(n \pm 1)\theta = \cos n\theta\cos\theta \pm \sin n\theta\sin\theta.$$

En ajoutant ces deux équations, nous obtenons

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Nous en déduisons que $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ et que $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$. Si les polynômes ont une parité définie (ce qui est le cas pour les premiers, T_0 est pair, T_1 est impair), alors la parité de T_{n+1} est la même que celle de T_{n-1}, si bien que la parité de T_n est celle de n.

c) Zéros de T_n
L'équation $\cos n\theta = 0$ admet les solutions $\theta_k^{(n)} = (2k+1)\pi/2n$, d'où les zéros de T_n :

$$x_k^{(n)} = \cos[(2k+1)\pi/2n]$$

(voir fig. 1). Pour ordonner les zéros de deux polynômes successifs, nous pouvons, plus simplement, examiner les valeurs de θ puisque la fonction $\cos\theta$ est monotone sur l'intervalle considéré. La figure montre la disposition relative des zéros de T_4 et de T_5. Nous devons vérifier qu'il existe un entier j tel que

$$(2k+1)\pi/2n \leq (2j+1)\pi/(2n-2) \leq (2k+3)\pi/2n.$$

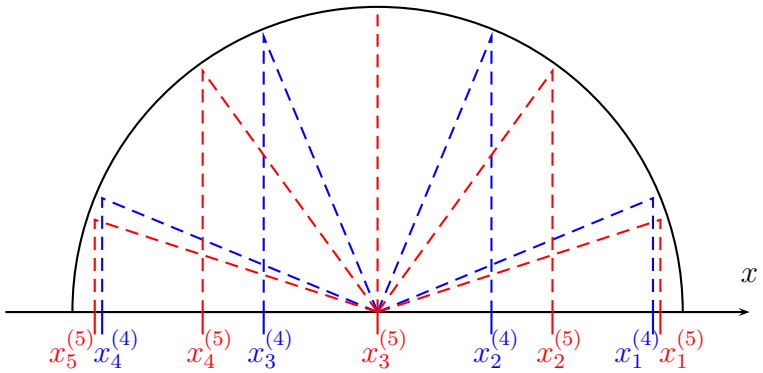

FIGURE 1 – Positions des zéros des polynômes de Tschebychef d'ordre 4 et 5

Laissant de côté le facteur commun $\pi/2$, nous nous contenterons de voir que ces conditions sont remplies si $j = k$, car alors

$$\frac{2k+1}{n} - \frac{2k+1}{n-1} = -\frac{2k+1}{n(n-1)} \leq 0$$

$$\frac{2k+1}{n-1} - \frac{2k+3}{n} = \frac{3-2(n+k)}{n(n-1)} \leq 0 \text{ si } n > 2.$$

d) $\cos n\theta$ est toujours plus petit que 1 en valeur absolue, de même que T_n.

e) Orthogonalité des T_k
Il faut calculer l'intégrale

$$I_{k,\ell} = \int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Le changement de variable $x = \cos\theta$ mène à

$$I_{k,\ell} = \int_0^\pi \cos k\theta \cos \ell\theta d\theta$$

soit si $k \neq \ell$,

$$I_{k,\ell} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\cos(k+\ell)\theta + \cos(k-\ell)\theta\right] d\theta$$

Cette dernière expression est nulle puisque le sinus s'annule aux deux bornes. Si $k = \ell$, le même changement de variable donne

$$I_{k,k} = \int_0^\pi \cos^2 k\theta d\theta$$

qui vaut $\pi/2$ si $k \neq 0$ et π si $k = 0$.

f) À partir des expressions obtenues en (a) et 1(b), nous trouvons

$$x^0 = 1 = T_0\,;\; x = T_1\,;\; x^2 = (T_0 + T_2)/2\,;\; x^3 = \tfrac{1}{4}(T_3 + 3T_1)\,;$$

$$x^4 = \tfrac{1}{8}(T_4 + 4T_2 + 3T_0)\,;\; x^5 = \tfrac{1}{16}(T_5 + 5T_3 + 10T_1).$$

g) et h) Erreurs d'approximation
Le développement de Taylor de e^x limité au 5$^{\text{e}}$ ordre est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^\xi}{6!}$$

avec $\xi \in [-1, 1]$ (le terme d'erreur découle de la forme générale $\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}$). L'erreur commise avec p_5 est donc inférieure à $e/720 = 0{,}0038$ en valeur absolue. En remplaçant chaque puissance de x par son expression en fonction des T_i, nous aboutissons à

$$q_5 = \frac{81}{64}T_0 + \frac{217}{192}T_1 + \frac{13}{48}T_2 + \frac{17}{384}T_3 + \frac{T_4}{192} + \frac{T_5}{1920}.$$

L'erreur est la même que précédemment (simple réorganisation de la somme).

i) En négligeant les deux derniers termes de q_5, nous commettons une erreur supplémentaire au plus égale à $\frac{1}{192} + \frac{1}{1920} = 0{,}0058$ puisque les polynômes sont bornés par un, soit au total 0,0096. En revenant aux puissances de x, nous trouvons

$$q_3^* = \frac{191}{192} + \frac{383}{384}x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{17}{96}x^3.$$

Numériquement $q_3^*(1) = 2{,}71094$; en assimilant e^x et $q_3^*(x)$, nous faisons donc une erreur égale à 0,0073 en $x = 1$, un peu inférieure à la borne précédente.

j) Nombre d'opérations
Il faut cinq multiplications pour calculer numériquement p_5, une fois ce polynôme mis sous la forme de Horner. De même, q_3, qui est du 3^e degré, nécessite trois multiplications au moins.