⇦ Retour
au site web

Exercice 7-2 : Polynômes de Legendre

Rappelons la définition de la projection d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ sur la droite parallèle au vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}.$$

La notation $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ désigne le produit scalaire des deux vecteurs. Pour cet exercice, les vecteurs sont des polynômes et le produit scalaire s'écrit

$$(p(x),q(x)) \equiv \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

L'algorithme de Gram–Schmidt va permettre de former systématiquement quatre combinaisons linéaires des monômes $1, x, x^2, x^3$ qui formeront un système de fonctions orthogonales par rapport à ce produit scalaire. Nous notons $p_i(x)$ ces polynômes et $P_i(x)$ leurs équivalents normalisés.

On choisit $p_0 = 2 = P_0$ puis

$$p_1 = x - \mathrm{pr}_{p_0}(x) = x - \frac{(x,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0 = x,$$

car le produit (x, p_0) est nul (intégrale d'une fonction impaire).

$$p_2 = x^2 - \mathrm{pr}_{p_0}(x^2) - \mathrm{pr}_{p_1}(x^2) = x^2 - \frac{(p_0,x^2)}{(p_0,p_0)}p_0 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Le terme contenant le produit (p_1, x^2) est nul à cause de la parité. Enfin,

$$p_3 = x^3 - \mathrm{pr}_{p_0}(x^3) - \mathrm{pr}_{p_1}(x^3) - \mathrm{pr}_{p_2}(x^3).$$

Les projections dans les directions de p_0 et p_2 sont nulles, il reste

$$p_3 = x^3 - \frac{(p_1,x^3)}{(p_1,p_1)}p_1 = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Il faut encore normaliser les polynômes p_i. Traitons par exemple p_2. Il faut que $P_2 = cp_2$ vérifie $(P_2, P_2) = 2/5$, ce qui détermine c. En effet :

$$(P_2,P_2) = c^2\int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = 2c^2\frac{4}{45},$$

d'où $c = \frac{3}{2}$ et

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Vous trouverez de même

$$P_1 = x \quad ; \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$