Retour au site web

**Exercice 7-6 : Fonction génératrice**

La fonction génératrice (ou, selon une terminologie plus récente, la série génératrice) s'écrit

$$g(u,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} \equiv \sum_0^\infty R_n(x)u^n.$$

Dérivons par rapport à $u$ :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{1}{2}[1-2ux+u^2]^{-3/2}(-2x+2u) = \sum nR_n u^{n-1},$$

ce que nous écrivons sous la forme

$$(x-u)[1-2ux+u^2]^{-1/2} = (1-2ux+u^2)\sum nR_n u^{n-1}$$

ou encore

$$(x-u)\sum R_n u^n = (1-2ux+u^2)\sum nR_n u^{n-1}.$$

Identifions les coefficients de $u^n$ :

$$xR_n - R_{n-1} = (n+1)R_{n+1} - 2xnR_n + (n-1)R_{n-1},$$

soit, en regroupant les termes

$$(n+1)R_{n+1}(x) - (2n+1)xR_n(x) + nR_{n-1}(x) = 0,$$

qui est la relation de récurrence cherchée.

Procédons de la même manière pour la dérivée par rapport à $x$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{2}[1-2ux+u^2]^{-3/2}(-2u) = \sum R_n'(x)u^n,$$

ce qui s'écrit aussi

$$u\sum R_n(x)u^n = (1-2ux+u^2)\sum R_n'(x)u^n.$$

Par identification, nous trouvons

$$R_{n-1} = R_n' + 2xR_{n-1}' + R_{n-2}'$$

ou encore

$$R_{n+1}' + R_{n-1}' = 2xR_n' + R_n.$$

En dérivant, par rapport à $x$, la relation de récurrence et en ajoutant au résultat un multiple de l'équation précédente, nous obtenons la relation

$$R_{n+1}' - R_{n-1}' = (2n+1)R_n.$$

Une équation où figurent seulement $R_n$ et ses dérivées s'obtient par une suite laborieuse d'éliminations. La demi-somme des deux équations précédentes nous donne

$$R_{n+1}' = (n+1)R_n + xR_n',$$

alors qu'en formant la demi-différence nous trouvons

$$R_{n-1}' = -nR_n + xR_n'.$$

Passant de $n$ à $n-1$ ; il vient

$$R_n' = nR_{n-1} + xR_{n-1}'.$$

Remplaçons $xR_{n-1}'$ :

$$(1-x^2)R_n' = nR_{n-1} - nxR_n.$$

Dérivant par rapport à $x$ et éliminant $R_{n-1}'$, nous aboutissons à l'équation différentielle qui régit les polynômes $R_n$ :

$$(1-x^2)R_n''(x) - 2xR_n'(x) + n(n+1)R_n(x) = 0.$$