Retour au site web

**Exercice 8-1 : Dérivée seconde par la méthode des coefficients indéterminés**

Insérons les expressions de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ dans la définition de $Df$ :

$$\begin{aligned} Df &= (A_+ + A_0 + A_-)f + h(A_+ - A_-)f' + \frac{h^2}{2}(A_+ + A_-)f'' \\ &+ \frac{h^3}{6}(A_- - A_-)f^{(3)} + \frac{h^4}{24}[A_+ f^{(4)}(\xi_+) + A_- f^{(4)}(\xi_-)]. \end{aligned}$$

Pour que cette expression approche au mieux la dérivée seconde, nous imposons trois conditions qui vont déterminer les trois inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_- + A_0 + A_+ &=& 0, \\ A_- - A_+ &=& 0, \\ A_- + A_+ &=& 2/h^2. \end{array} \right.$$

La solution de ce système est $A_+ = A_- = 1/h^2$, $A_0 = -2/h^2$. $Df$ s'écrit alors

$$Df = \frac{1}{h^2}[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)].$$

En invoquant le théorème de la valeur intermédiaire, nous mettons le terme d'erreur sous la forme

$$\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x-h, x+h].$$