Retour au site web

Exercice 8-10 : Intégration de Gauss à trois points composite

Cette intégrale bien connue vaut $J = \pi/2 \simeq 1{,}570796$. Pour l'estimer à l'aide d'une formule de Gauss, il faut tout d'abord faire apparaître des intégrales sur le segment $[-1, 1]$. On a successivement

$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} + \int_2^\infty \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{du}{1+(u+1)^2} + \int_0^{1/2} \frac{du}{1+u^2} \equiv J_1 + J_2 \end{aligned}$$

et

$$J_2 = 4 \int_{-1}^1 \frac{dv}{16+(v+1)^2}.$$

La méthode de Gauss à trois points s'écrit ici

$$J_1 \simeq \frac{5/9}{1+(1+0{,}774596)^2} + \frac{5/9}{1+(1+0{,}774596)^2} + \frac{4}{9},$$

$$J_2 \simeq 4 \left[\frac{5/9}{16+(1+0{,}774596)^2} + \frac{5/9}{16+(1+0{,}774596)^2} + \frac{8}{9 \times 17} \right],$$

soit $J_1 \simeq 1{,}107034$, $J_2 \simeq 0{,}463647$ et $J \simeq 1{,}570680$, une erreur un peu supérieure à 10^{-4}.