Retour au site web

Exercice 8-12 : Intégration de Gauss–Tschebychef

a) Les polynômes de Tschebychef ont déjà été étudiés (exercice 7-1). Les zéros du polynôme d'ordre n sont

$$x_k^{(n)} = \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right].$$

b) On voit que les polynômes de Tschebychef sont orthogonaux sur le segment $[-1, 1]$ par rapport à la fonction de poids $(1-x^2)^{-1/2}$. Les abscisses a_k sont choisies de telle façon que $\pi(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ soit orthogonal à tout polynôme de degré inférieur (au sens du produit scalaire qui vient d'être défini). Il suffit pour cela que $\pi(x)$ soit proportionnel à T_n, donc que les a_k coïncident avec les $x_k^{(n)}$.

c) On a ici $f(x) = e^x$ et $f^{(2n)} = e^x$, inférieure à 1 sur l'intervalle d'intégration. Si $n = 3$, l'erreur d'intégration est d'environ 0,00014 alors que, pour $n = 4$, elle vaut $0{,}61 \times 10^{-6}$. On prend donc $n = 4$ et alors

$$J \simeq \frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{3} \exp\left\{\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{8}\right]\right\} = 3{,}97746.$$