

**Exercice 8-2 : Intégration par la méthode des trapèzes composite**

a) Supposons que l'on subdivise l'intervalle en  $2n$  sous-intervalles. On a alors

$$h' = \frac{b-a}{2n} \quad ; \quad a_k = a + h'k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Avec le pas  $h = (b-a)/n$ , on utilisera les abscisses  $a_j = a + hj = a + 2h'j = a + h'k$ , avec  $k = 0, 2, 4, \dots, 2n$  (un point sur deux de la division précédente).

b) La formule des trapèzes composée s'écrit, pour  $2n+1$  et  $n+1$  points respectivement

$$\begin{aligned} T_2 &= h' \left[ \frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{2n-2} + f_{2n-1} + \frac{1}{2}f_{2n} \right], \\ T_1 &= 2h' \left[ \frac{1}{2}f_0 + f_2 + \dots + f_{2n-2} + \frac{1}{2}f_{2n} \right]. \end{aligned}$$

L'extrapolation de Richardson fournit la valeur améliorée

$$T \simeq \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1$$

soit

$$T \simeq h' \left[ \frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{2}{3}f_2 + \dots + \frac{2}{3}f_{2n-2} + \frac{4}{3}f_{2n-1} + \frac{1}{3}f_{2n} \right].$$

Vous reconnaissez la formule de Simpson composée pour des pivots distants de  $h'$ . Remarque : ce résultat est accidentel, aucune autre formule de Newton-Cotes ne peut être obtenue par application de l'extrapolation de Richardson à une méthode d'ordre inférieur.