Exercice 8-3 : Intégration par la méthode des coefficients indéterminés

Il faut écrire que la formule proposée est exacte pour les fonctions $x^0 = 1, x, x^2$, soit

$$\begin{aligned} A + M + B &= b - a, \\ Aa + M\frac{a+b}{2} + Bb &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \\ Aa^2 + M\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + Bb^2 &= \frac{1}{3}(b^3 - a^3). \end{aligned}$$

Suit une résolution laborieuse de ce système linéaire. Multipliant la première équation par a et retranchant de la deuxième, on trouve

$$M + 2B = b - a.$$

On multiplie la même équation par a^2 et on retranche de la troisième pour obtenir

$$(3a + b)\frac{M}{4} + (b + a)B = \frac{1}{3}(ab + b^2 - 2a^2).$$

On élimine B entre ces deux dernières équations pour trouver

$$M = \frac{2}{3}(b - a).$$

Il en découle

$$A = B = \frac{1}{6}(b - a).$$