

**Exercice 8-8 : Intégration de Gauss à un et à deux points**

La méthode de Gauss à un point comporte deux paramètres inconnus : l'abscisse  $x_0$  et le poids  $w_0$ . On les détermine en imposant que la formule soit exacte pour  $f = x^0 = 1$  et  $f = x$ , ce qui conduit aux deux équations

$$\int_{-1}^1 dx = 2 = w_0,$$
$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = w_0 x_0.$$

La solution est  $x_0 = 0, w_0 = 2$ .

Les abscisses et les poids de la méthode à deux points, s'obtiennent de la même manière :

$$\int_{-1}^1 dx = 2 = w_1 + w_2,$$
$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2,$$
$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2,$$
$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3.$$

Ce système d'équations non linéaires se résout sans trop de peine en utilisant d'abord les équations sans second membre

$$w_1 x_1 = -w_2 x_2,$$
$$w_1 x_1^3 = -w_2 x_2^3.$$

En faisant le rapport des ces deux relations, on trouve  $x_1 = \pm x_2$ ; les pivots ne pouvant être identiques, on choisit  $x_1 = -x_2$ . On détermine alors facilement  $w_1 = w_2 = 1$  puis  $x_1 = -x_2 = -1/\sqrt{3}$ .