

Exercice 9-4 : Analogie discret du produit de convolution

$$\begin{aligned}
H_k &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} F_{\ell} G_{k-\ell} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} e^{-2i\pi\ell m/N} f_m \right] \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi(k-\ell)n/N} g_n \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m,n} f_m g_n \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-2i\pi\ell(m-n)/N} \right] e^{-2i\pi kn/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m,n} f_m g_n N \delta_{mn} e^{-2i\pi kn/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n e^{-2i\pi kn/N},
\end{aligned}$$

ce qui montre que la séquence H_k est la TFD de la séquence $f_n g_n$.