Retour au site web

Exercice 9-6 : Analogue discret du théorème de Parseval–Plancherel

Il est plus rapide de calculer la quantité

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_k F_k G_k^* &= \frac{1}{N}\sum_k \left\{ \left[\sum_m f_m e^{-2i\pi km/N}\right] \left[\sum_n g_n e^{-2i\pi kn/N}\right]^* \right\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n} f_m g_n^* \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k(n-m)/N}\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m,n} f_m g_n^* N \delta_{mn} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n^*.
\end{aligned}$$

Si l'on prend $f_n = g_n$ et donc $F_k = G_k$, le résultat précédent devient

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2.$$