

Analyse en fréquence des marées

1 Introduction

Les marées ont été étudiées depuis des siècles. Plin l'Ancien (vers 60 de notre ère) savait que ces mouvements du niveau de la mer étaient dus à l'action de la Lune et du Soleil. Des éphémérides des marées existaient en Chine dès l'an 900. Newton permit des avancées significatives dans la compréhension des marées grâce à sa nouvelle théorie de la gravitation universelle, mais c'est Laplace à la fin du XVIII^e siècle qui donna la première explication complète. Cette théorie, perfectionnée à de nombreuses reprises, est maintenant presque exacte. Ainsi, à partir des connaissances très précises accumulées sur les orbites de la Terre et de la Lune, on sait prévoir la hauteur de la mer en tout point de la côte des années à l'avance, avec une incertitude d'une trentaine de centimètres due aux variations des conditions atmosphériques. Nous ne détaillerons pas ici la théorie des marées que vous pourrez trouver dans divers articles [1–3] et sur beaucoup de sites internet (voir en particulier la revue remarquable de G. Bouyrie [4], le site du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM) [5] et l'ouvrage de B. Simon [6] disponible gratuitement sur ce site). Nous proposons dans la section suivante une explication très simplifiée.

La marée est une variation périodique du niveau de la mer. Sur les côtes françaises, la période apparente est de l'ordre de 12 heures. Une observation plus soignée montre que ces oscillations du niveau de la mer dépendent en fait de plusieurs fréquences. À partir des mesures du niveau de la mer fournies par le SHOM et des données astronomiques, nous essaierons de déterminer numériquement les amplitudes et les phases des différentes composantes harmoniques dont la somme constitue la marée.

2 Origine des marées

La marée résulte des attractions combinées de la Lune et du Soleil sur l'eau des mers mais il est important de comprendre qu'il s'agit d'un effet différentiel car le mouvement de la Terre dépend aussi de l'action de ces deux astres. Le niveau observé résulte de la différence entre les déplacements de l'eau et de la Terre (solide). Les forces exercées par un astre lointain en différents points de la Terre sont représentées sur la figure 1. Soit r , le rayon terrestre et R , la distance entre le centre de la Terre et l'astre (Lune ou Soleil).

La force exercée par l'astre perturbateur sur une molécule d'eau en A est proportionnelle à $1/(R-r)^2$. La Terre (solide) subit uniformément une force qui dépend de $1/R^2$ (en vert sur la figure 1(a)). Dans un repère lié à la Terre (qui n'est pas un référentiel d'inertie), la molécule d'eau subit une force qui est la somme de l'attraction de l'astre ($\sim 1/(R-r)^2$) et de la force d'inertie ($\sim -1/R^2$). Comme $r \ll R$, on trouve, au premier ordre en r/R :

$$f_{\text{totale}}(A) \sim r/R^3.$$

Au point B, le raisonnement est le même mais comme B est plus loin de l'astre que C, le résultat est changé de signe.

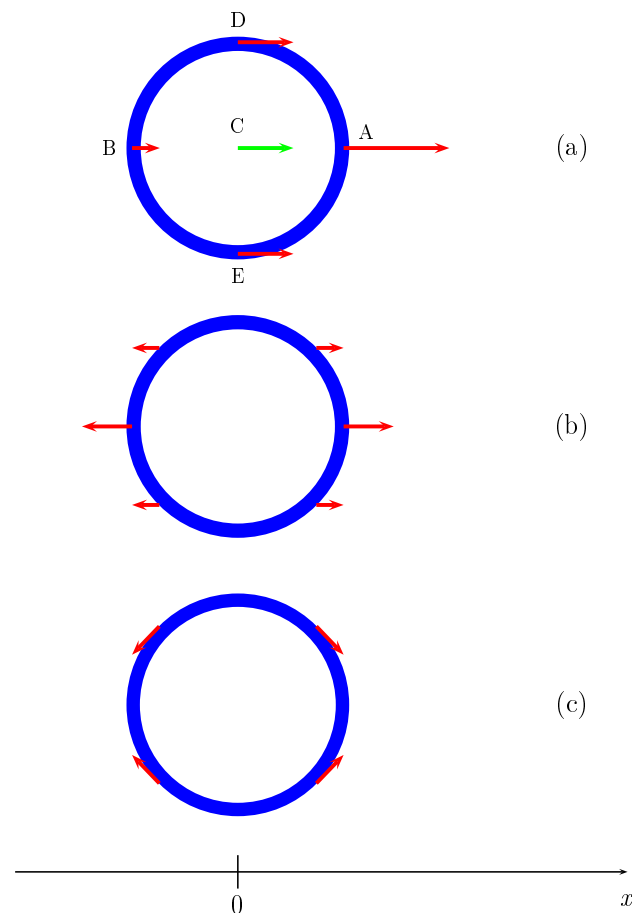


FIGURE 1 – Forces exercées sur la Terre et sur l’océan par un astre situé dans la direction des x positifs. (a) Forces réelles (en rouge : forces sur l’eau ; en vert : résultante des forces sur la Terre, au centre de masse de celle-ci) ; (b) accélérations, vues par un observateur lié à la Terre ; (c) composantes tangentielles des accélérations.

En D et E, la force d’attraction apparente (totale) est nulle.

En tout point de la surface du globe terrestre, la composante normale de f_{totale} est absolument négligeable devant l’attraction terrestre. Ce sont les composantes tangentielles qui vont créer des courants de marée et « tasser » l’eau vers A et B (figure 1(c)). Ces résultats ont deux conséquences importantes :

- Chaque astre crée deux bourrelets en deux zones diamétralement opposées ou encore deux marées.
- Le Soleil est beaucoup plus lourd que la Lune mais, à cause de la dépendance en $1/R^3$, la Lune est le perturbateur le plus important (d’un facteur 2 environ). À la pleine lune ou à la nouvelle lune, Soleil, Terre et Lune sont en gros alignés (on parle de syzygie) et les effets des deux astres se renforcent, créant une marée de « vive-eau ». En revanche, lors du premier et du dernier quartier, Soleil et Lune sont vus de la Terre dans des directions à angle droit et leurs actions sur l’océan interfèrent de façon destructive : c’est une marée de « morte-eau ».

Nous avons négligé de nombreuses complications. Vues de la Terre considérée comme immobile, les trajectoires de la Lune et du Soleil sont elliptiques et les distances Terre-Lune et Terre-Soleil sont (légèrement) variables. De plus, ces trajectoires ne sont pas coplanaires et ne sont pas non plus situées dans le plan de l’équateur. Par ailleurs, l’océan n’est pas

une couche liquide uniforme couvrant toute la Terre. En réalité, une mer (presque) fermée, comme la Méditerranée, se comporte comme une structure résonnante (un peu comme une membrane de tambour) soumise à une excitation périodique. Dans les océans, on observe plutôt des ondes de marées. Enfin l'eau de mer présente une certaine viscosité dont il faudrait aussi tenir compte.

Les périodes des deux forces d'attraction principales sont de 24,8412 h (période du mouvement apparent de la Lune) et de 24 h (durée d'un jour solaire). On s'attend donc à observer des variations du niveau de la mer aux fréquences correspondant à la moitié de ces périodes, soit une oscillation de fréquence $f_m = 0,0805114 \text{ h}^{-1}$ interférant avec une autre oscillation de fréquence $f_s = 0,0833333 \text{ h}^{-1}$.

3 Projet

Nous vous proposons d'analyser en fréquence une suite de mesures du niveau de la mer en un point. La démarche est inspirée de [3]. Il vous faudra passer par plusieurs étapes :

1. Télécharger un fichier de données et extraire la suite des hauteurs de la mer (procédure détaillée dans la section 4 ci-dessous).
2. Déterminer, à l'aide d'une transformation de Fourier, la « densité spectrale de puissance » du phénomène et estimer les fréquences des principales composantes (section 5).
3. En supposant que les deux composantes principales ont pour fréquences f_m et f_s (données plus haut), chercher les amplitudes et les phases de ces oscillations par une méthode de moindres carrés (section 6.1).
4. En utilisant les paramètres obtenus, calculer un niveau de la mer « théorique ». Retrancher ces valeurs des données initiales pour obtenir une suite de valeurs « résiduelles ». Calculer le spectre en puissance de ces variations résiduelles et estimer les fréquences présentes (section 6.2).
5. Effectuer une nouvelle itération (section 6.2).

4 Données

Pour obtenir une suite de relevés du niveau de la mer :

- Rendez-vous sur le site : <http://data.shom.fr>.
- Cliquez sur « ajouter des données » (à gauche).
- Cliquez, dans le menu de gauche, sur « données marégraphiques ». Il apparaît une carte où des points verts indiquent les positions des divers marégraphes.
- À l'aide de la souris et/ou des flèches de direction, agrandissez la carte et centrez-la sur le point qui vous intéresse. Cliquez sur ce point. Il apparaît un graphe montrant trois courbes : derniers relevés, prévisions et écarts entre les deux.
- Cliquez sur « plus d'informations sur la station ». Le site affiche les mêmes courbes que précédemment, mais agrandies.
- Cliquez sur « téléchargement direct » en haut à droite.
- Choisissez les dates de début et de fin (une période de six mois est amplement suffisante), le type de fichier (de préférence `.txt`) et le type de données (les plus commodés sont

désignées par « brutes horaires », mais elles ne sont disponibles qu'avec un retard d'un mois). Cliquez sur « téléchargement direct », en bas.

- Dans la fenêtre qui apparaît, indiquez votre nom et votre adresse mail. Cliquez sur « envoyer », puis sur « cliquez pour télécharger ».
- Les données téléchargées se trouvent dans le dossier compressé **data.zip**, dans le fichier **data.txt**. Il commence par douze lignes de texte indiquant le lieu et l'heure de recueil de données et leur nature puis, dans le cas de données horaires, une ligne par heure.
- Pour la station du Conquet, le 01/01/2015 à 0 h, on lit :

01/01/2015 00:00:00;5.54;4

qui vous indique la date, l'heure, la hauteur de la mer (5,54 m), par rapport à une origine arbitraire, et la nature des données. Vous devrez extraire la suite des hauteurs, soit avec un logiciel de traitement de texte, soit avec un programme écrit pour l'occasion.

5 Analyse de Fourier

Soit $x(t)$ une grandeur physique périodique (ou approximativement périodique). Comment peut-on déterminer la ou les fréquences présentes ? On peut penser à calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$. L'interprétation du résultat n'est cependant pas aisée car X peut comporter des valeurs négatives ou complexes. Il est plus commode de calculer la densité spectrale de puissance (DSP), $|X(f)|^2$, souvent appelée « périodogramme ». Dans le cas présent, la hauteur de la mer étant mesurée à des dates discrètes régulièrement espacées, la fonction $x(t)$ est représentée par la suite x_i . Une transformée de Fourier discrète (TFD) permet d'obtenir la suite X_k . On s'intéressera donc à la suite $|X_k|^2$ comme estimation de la DSP.

Nous vous recommandons de prendre deux précautions avant de faire le calcul :

1. Beaucoup de programmes de transformée de Fourier discrète demandent que le nombre de valeurs N soit une puissance de 2 ; pour 1024 valeurs on obtient une résolution en fréquence raisonnable.
2. Il vaut mieux que la suite x_i ait une valeur moyenne nulle, ce qui évitera que la transformée de Fourier ne présente un grand pic parasite autour de la fréquence 0. On retranchera donc la valeur moyenne \bar{x} de chaque x_i .

Les logiciels Python, Scilab ou encore Excel comportent tous des sous-programmes de transformée de Fourier rapide (TFR ou FFT, un algorithme de calcul de la TFD).

Vous allez obtenir une suite X_k , $1 \leq k \leq N$ représentant des amplitudes complexes en fonction de k ; comment convertir la variable mathématique k en fréquence physique ? L'ordre des fréquences dans le vecteur X est le suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} k : & 1 & 2 & \cdots & N/2 & N/2 + 1 & (N/2 + 1)\delta f & \cdots & N - 1 & N \\ f : & 0 & \delta f & \cdots & (N/2 - 1)\delta f & (N/2)\delta f & -(N/2 - 1)\delta f & \cdots & -2\delta f & -\delta f \\ & & & & & & -(N/2)\delta f & & & \end{array}$$

À cause de la périodicité des X_k , les valeurs correspondant aux fréquences $(N/2)\delta f$ et $-(N/2)\delta f$ sont confondues. L'ordre habituel peut être retrouvé par la transformation $Y = X(N/2 + 1 : N, 1 : N/2)$ (fonction **fftshif** de Scilab).

Dans le cas des données marégraphiques, quelles sont les fréquences extrêmes ? Quelle est la résolution en fréquence ? La suite x_i est réelle si bien que sa TFR présente la symétrie hermitienne : $X_{-k} = X_k^*$. La DSP se calcule alors, **sans réorganisation** des X_k , par les formules suivantes :

$$P_1 = |X_1|^2 \quad ; \quad P_k = |X_k|^2 + |X_{N+2-k}|^2 \quad ; \quad P_{N/2+1} = |X_{N/2+1}|^2.$$

6 Ajustement au sens des moindres carrés

6.1 Deux fréquences

Dans un premier temps, nous vous proposons d'utiliser un modèle d'oscillation comportant les deux fréquences f_m et f_s . Les amplitudes et les phases de ces deux composantes seront déterminées à l'aide d'un programme de moindres carrés non-linéaire. Vous pouvez écrire un tel programme ou, pour gagner du temps, utiliser l'un de ceux inclus dans Scilab, Python, Excel ou LibreOffice/Calc. Vous pourrez ensuite former une suite de valeurs calculées x_i^{calc} .

Représenter sur un même graphe les valeurs observées et les valeurs calculées, puis l'écart Δx entre ces deux séries de valeurs. L'accord est-il satisfaisant ? L'écart-type

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^{obs} - x_i^{calc})^2}$$

où N est le nombre de mesures, permet de caractériser la qualité de l'ajustement ; du fait des fluctuations de la pression atmosphérique et de l'action du vent, l'écart-type est rarement inférieur à 0,2 m même pour les modèles les plus perfectionnés.

Il est possible d'inclure les fréquences parmi les paramètres ajustables mais la convergence du programme de moindres carrés devient alors difficile.

6.2 Prise en compte de fréquences supplémentaires

Pour voir si les variations observées du niveau de la mer comprennent d'autres composantes, vous pouvez former le périodogramme de la suite de valeurs résiduelles $\Delta x_i = x_i^{obs} - x_i^{calc}$. Celui-ci comprendra vraisemblablement plusieurs pics, mais la résolution en fréquence de la DSP n'est pas suffisante pour que l'on puisse utiliser ces valeurs pour améliorer le modèle. Il vaut mieux se tourner encore vers l'astronomie. L'orbite de la Lune est elliptique et elle est parcourue en 27,55 jours, soit une fréquence $f_{m,o} = 0,0015124 \text{ h}^{-1}$. Cette fréquence n'est pas directement observable mais il est plausible que les fréquences $f_{m+} = f_m + f_{m,o}$ et $f_{m-} = f_m - f_{m,o}$ soient présentes. Vous pouvez vérifier cette assertion en pratiquant un nouveau lissage par moindres carrés à l'aide d'un modèle à 4 sinusoides. L'écart-type décroît-il ?

Cette démarche par itérations successives (calcul de la DSP, repérage des fréquences non encore prises en compte, ajustement avec un modèle incorporant ces fréquences, etc.) peut se poursuivre tant que l'écart-type décroît. Comme les équations de la mécanique des fluides sont en fait non-linéaires, on s'attend à ce que la DSP contienne aussi des sous-harmoniques des fréquences précédentes (comme $f_s/2, f_m/2$) et des harmoniques (comme $pf_{m-}, p = 2, 3, \dots$). Selon [6], chapitre 5, un modèle à 8 fréquences représente 90% des variations de hauteur d'eau dans les ports français.

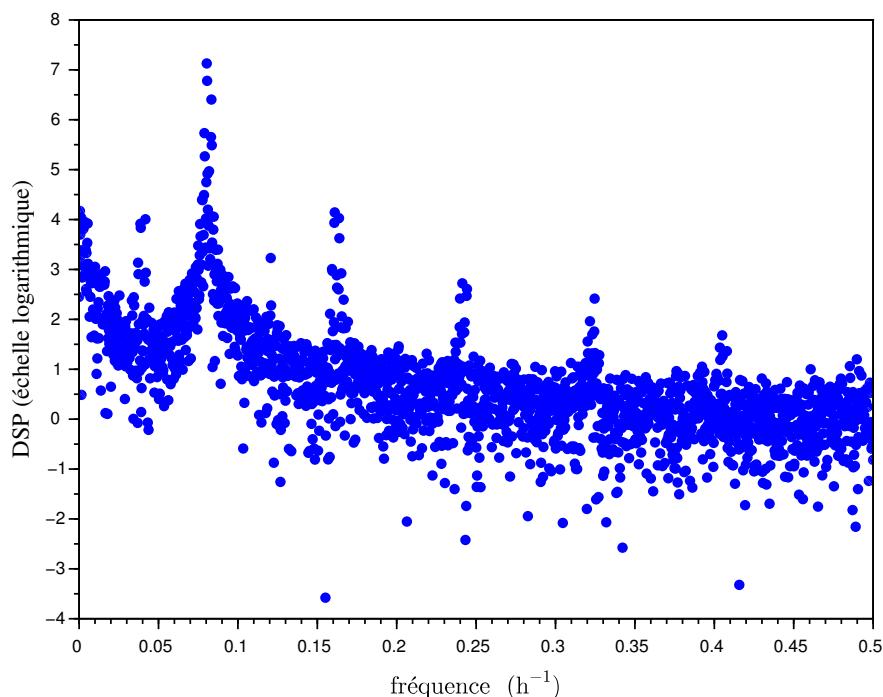


FIGURE 2 – Densité spectrale de puissance du niveau de la mer après soustraction des 4 composantes principales. Station du Conquet, période du 01/01/2015 au 20/06/2015.

7 Discussion

Nous venons de vous présenter une méthode d'analyse en fréquence des variations du niveau de la mer que l'on peut qualifier d'« artisanale ». Le SHOM utilise un modèle à 105 fréquences dont certaines sont associées à des amplitudes de l'ordre du cm. L'analyse en fréquence (ou analyse harmonique) est une activité très développée dans le domaine du traitement du signal et il existe à l'heure actuelle de nombreuses méthodes plus puissantes (et plus compliquées) que celle que nous venons de mettre en œuvre, en particulier les méthodes de prédiction linéaire [7].

Références

- [1] M. SAWICKY : Myths about gravity and tides. *The Physics Teacher*, 37:438–441, 1999.
- [2] E.I. BUTIKOV : A dynamical picture of the oceanic tides. *American Journal of Physics*, 70:1001–1011, 2002.
- [3] R. de LEVIE : Tidal analysis on a spreadsheet. *American Journal of Physics*, 72:644–651, 2004.
- [4] G. BOUYRIE : L'arpenteur du Web : marées océaniques. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 110:91–124, 2016. Article en accès libre sur le site du journal.
- [5] SHOM : <http://data.shom.fr>.
- [6] B. SIMON : *La marée océanique côtière*. Institut Océanographique, Paris, 2007.
- [7] M. BELLANGER : *Traitement numérique du signal*, chapitre 13. Dunod, 2012.