

## Corrigés d'exercices du Chapitre 3

### Exercice 24 (Voisinage tubulaire d'une sous-variété)

Introduisons quelques notations. Soient  $p$  et  $q$  la dimension et la codimension de  $M$ . Pour  $x \in M$ , soit  $h : \Omega \rightarrow E$  une paramétrisation locale telle que  $h(0) = x$  ( $\Omega$  étant un ouvert de  $\mathbf{R}^p$  contenant 0). On peut choisir  $\Omega$  suffisamment petit pour que le fibré normal soit trivialisable au dessus de  $h(\Omega)$ . En utilisant Gram-Schmid, on voit qu'il existe une paramétrisation locale de  $N(M)$  (au dessus de  $h(\Omega)$ ) de la forme

$$(u, y) \mapsto \left( h(u), \sum_{i=1}^q y_i \nu_i \right)$$

où les  $\nu_i$  forment pour tout  $u$  une base orthonormée de  $N_{h(u)}M$ .

a) L'application  $f$ , lue dans les cartes correspondantes, admet une différentielle en  $(x, 0)$  de matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} T_0 h & 0 & & \\ A & \nu_1 & \cdots & \nu_q \end{pmatrix}$$

qui est bien inversible.

b) D'après a) et le théorème d'inversion locale, il existe pour tout  $x \in M$  un ouvert  $U_x$  de  $N(M)$  contenant  $x$  tel que  $f$  soit un difféomorphisme de  $U_x$  sur son image. La réunion des  $f(U_x)$  est un ouvert  $W$  de  $\mathbf{R}^n$  qui contient  $M$ . En raison de la compacité, la distance de  $M$  au complémentaire de cet ouvert est strictement positive. Autrement dit, il existe un  $r > 0$  tel que

$$V_r(M) = \{x \in \mathbf{R}^n, \text{dist}(x, M) < r\}$$

soit inclus dans  $W$ .

On sait déjà que  $f$  est un difféomorphisme local de  $f^{-1}(V_r) = N_r(M)$  sur  $V_r(M)$ . On va voir maintenant qu'il existe un  $r' > 0$  (éventuellement inférieur à  $r$ ) tel que la restriction de  $f$  à  $N_{r'}$  soit injective. Si ce n'était pas le cas, il existerait deux suites  $(x_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n)_{n \geq 0}$  de points de  $M$ , une suite  $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$  de réels positifs tendant vers 0, et deux suites de vecteurs  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$ , orthogonaux à  $M$  en  $x_n$  et  $y_n$  respectivement, telles que

$$x_n + v_n = y_n + w_n, \text{ avec } (x_n, v_n) \neq (y_n, w_n).$$

En raison de la compacité de  $M$ , on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge. Comme  $d(x_n, y_n) \leq \|v_n\| + \|w_n\| \leq \epsilon_n$ , on voit que les suites  $(x_n, v_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n, w_n)_{n \geq 0}$ , vues comme suites de points du fibré normal, convergent vers le même point  $(z, 0)$  de  $N(M)$ . Mais puisque injective sur un ouvert contenant  $(z, 0)$ , cela est impossible.

Montrons maintenant que si  $y \in V_r(M) \setminus M$  pour un tel  $r$ , il existe un  $x \in M$  et un seul tel que  $\text{dist}(y, x) = \text{dist}(y, M)$ , et que dans ces conditions  $y = x + v$ , avec  $\|v\| = \text{dist}(y, M)$ . Pour le voir, on remarque d'abord que, toujours en raison de la compacité de  $M$ , le minimum de la distance est réalisé en un  $x \in M$  au moins.

Un tel  $x$  est un point critique de la restriction à  $M$  de la fonction  $z \mapsto \|z - y\|^2$ , donc  $v = \overrightarrow{xy}$  est orthogonal à  $T_x M$ , et  $y = x + v$  avec  $\|v\| < r$ . Cela force l'unicité de  $x$  d'après ce qui précède.

**Remarque.** La preuve utilise le fait que  $M$  est une sous-variété  $C^2$ . L'exercice montre que cette condition est nécessaire.

## Exercice 27 (Une petite dose de géométrie complexe)

a) C'est une conséquence directe de la définition.

b) L'espace total  $\xi$  de ce fibré est une sous-variété holomorphe de  $P^n \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n+1}$ . Si  $s$  est une section holomorphe,  $\text{pr}_2 \circ s$  est une application holomorphe de  $P^n \mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^{n+1}$ . Mais les fonctions holomorphes sur une variété complexe compacte sont constantes (principe du maximum). En revenant aux équations de définition (exercice 21), on voit alors que  $\text{pr}_2 \circ s$  s'annule identiquement.

c) Soit  $l$  une forme linéaire sur  $\mathbf{C}^{n+1}$ . Alors  $l$ , restreinte à l'espace total, donne une forme linéaire sur chaque fibre de  $\xi$ , et donc une section  $\sigma_l$  de  $\xi^*$ . Si  $v$  est un vecteur non nul de  $\mathbf{C}^{n+1}$  tel que  $l(v) \neq 0$ , cette section ne s'annule pas sur la fibre de  $[v]$ . On a défini ainsi une application linéaire injective de  $(\mathbf{C}^{n+1})^*$  dans l'espace vectoriel des sections holomorphes de  $\xi^*$ .

**Remarque.** Cette application est également surjective. Pour  $n = 1$ , on remarque d'abord que  $\sigma_l$  n'a qu'un zéro (le point de  $P^1 \mathbf{C}$  défini par le noyau de  $l$ !) et que ce zéro est simple. Si  $s$  est une autre section, de deux choses l'une. Si  $s$  s'annule sur le zéro de  $\sigma_l$ , le quotient  $\frac{s}{\sigma_l}$  est une fonction holomorphe sur  $P^1 \mathbf{C}$ , donc constante. Sinon, c'est une fonction méromorphe ayant un seul pôle qui est simple : elle s'écrit donc comme le quotient de deux formes linéaires sur  $\mathbf{C}^2$ , le dénominateur étant proportionnel à  $l$ . Le cas  $n > 1$  se traite de la même façon, mais nécessite bien sûr des rudiments de fonctions holomorphes de plusieurs variables.