Corrigés d'exercices du Chapitre 4

Exercice 1

Il est bien plus commode de travailler dans une base où la forme s'écrit $2xy$. Un calcul direct montre alors que $O(1,1)$ est le produit direct du groupe des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$
par le groupe à quatre éléments (dit groupe du matelas) engendré par
$$(x,y) \mapsto (-x,-y) \quad \text{et} \quad (x,y) \mapsto (x,-y).$$
Ainsi, $O(1,1)$ a quatre composantes connexes. Ce phénomène, contrairement à ce qui est affirmé dans le livre (solution de l'exercice 11), se retrouve tel que dans les dimensions supérieures.

Exercice 6 (idéaux et sous–groupes distingués)

Attention : il faut supposer que G est connexe (voir les exercices supplémentaires du chapitre 4 présents sur ce site).

Voici la solution de la deuxième partie, la plus délicate.
Soit H un sous–groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ est un idéal de G. On va montrer dans un premier temps que la représentation adjointe laisse $\mathfrak{H}$ invariant. Pour $X \in \mathfrak{G}$, le groupe à un paramètre $t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp tX)$ s'écrit aussi $t \mapsto \exp\big(t\mathrm{ad}(X)\big)$, où l'on a posé $\mathrm{ad}(X)\cdot Y = [X,Y]$ (voir le théorème 1.30 et la proposition 4.16 du livre). D'après l'hypothèse, $\mathrm{ad}(X)$ laisse $\mathfrak{H}$ invariant, il en est donc de même de $\mathrm{Ad}(\exp tX)$. Cette propriété s'étend à $\mathrm{Ad}g$ pour tout $g \in G$: en raison de la connexité, G est engendré par les $\exp X$ quand X parcourt $\mathfrak{G}$.
Pour voir que H est distingué, on procède de même, en partant du fait que $g\exp(tY)g^{-1} = \exp(t\mathrm{Ad}g)\cdot Y$.