Principe de conservation de la masse

1. Variables d'Euler et dérivées particulaires

L'observateur d'un fluide en mouvement, dans la nature ou dans un laboratoire, regarde cet écoulement par rapport à son propre référentiel, et souhaite en définir les propriétés dans ce référentiel. Ce point de vue, attribué à Euler, consiste à décrire l'écoulement par un ensemble de fonctions de la position, caractérisée par le vecteur $\mathbf{x}$, et du temps t, pour la vitesse $\mathbf{u}$, la pression p, la masse volumique ρ, la température T, ainsi que pour toutes les autres grandeurs pertinentes, comme les concentrations des diverses espèces chimiques. Ces grandeurs :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t), \quad p(\mathbf{x},t), \quad \rho(\mathbf{x},t), \quad T(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

appelées *variables d'Euler*, doivent satisfaire aux grands principes de la physique, comme le principe de conservation de la masse, la loi fondamentale de la mécanique et le principe de conservation de l'énergie, dont chacun conduit à une équation importante.

Dans ce texte, nous nous limitons à établir l'équation qui exprime le principe de conservation de la masse. Les équations qui expriment la loi fondamentale de la mécanique et le principe de conservation de l'énergie sont introduites dans des textes voisins, accessibles sous l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques ». Chacune de ces équations nécessite l'emploi des dérivées par rapport au temps vues par l'observateur qui suit la particule dans son mouvement, lesquelles ne sont pas les dérivées vues par l'observateur au point fixe, ou observateur eulérien, que sont les dérivées partielles $\partial/\partial t$ des fonctions (1).

Commençons donc par établir l'expression de ces *dérivées particulaires*. Pour toute variable d'Euler à valeur scalaire $f(\mathbf{x},t)$, la définition de la dérivée particulaire est la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{f(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\, t+\delta t) - f(\mathbf{x},\, t)}{\delta t}\right]. \tag{2}$$

La différence qui figure au numérateur de cette expression peut s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t}\delta t + \frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_j + O(\delta t^2) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t}\right]\delta t + O(\delta t^2), \tag{3}$$

où l'on utilise la propriété $\delta x_j = u_j\,\delta t$, puisque la dérivée est prise en suivant une particule fluide donnée, et en appliquant la convention d'Einstein sur les indices répétés $\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_j = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_j$.

En prenant la limite $\delta t \to 0$, on obtient les expressions équivalentes :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_j\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)f. \tag{4}$$

L'expression de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume comme $I(t) = \int_D f(\mathbf{x},t)\mathrm{d}V$, portant sur un domaine D que l'on suit dans son mouvement, peut s'écrire sous l'une des trois formes suivantes, strictement équivalentes :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \oint_S f(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S = \int_D\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V = \int_D\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f(\nabla\cdot\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V. \tag{5}$$

Cette propriété peut être établie de la manière suivante, en partant encore de la définition :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{1}{\delta t}\left\{\int_{D'} f(\mathbf{x}, t+\delta t)\mathrm{d}V - \int_{D} f(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}V\right\}\right], \tag{6}$$

où D représente la position du domaine matériel considéré à l'instant t et D' sa position à l'instant $t+\delta t$.

Soit D l'union $D_1 \cup D_2$, tandis que D' est l'union $D_2 \cup D_3$, le domaine D_2 étant l'intersection $D \cap D'$, comme représenté sur la figure 1.

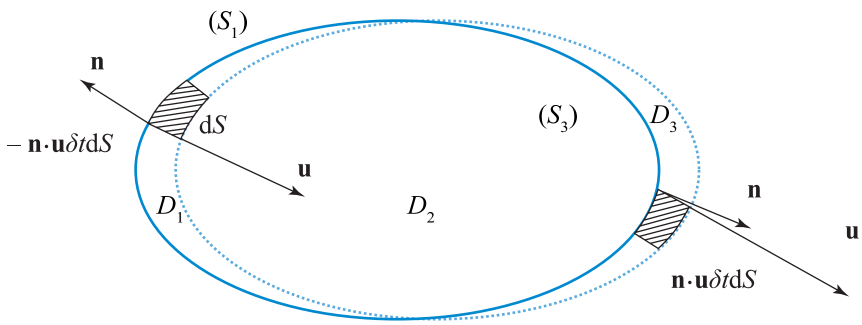

Figure 1. Illustration des domaines et sous-domaines D_1, D_2, D_3, et de leurs frontières respectives telles que $D = D_1 \cup D_2$ et $D' = D_2 \cup D_3$, sur lesquels s'appuie la dérivation des expressions (8) et (9).

Notons S_1 la portion de frontière de D extérieure à D', et S_3 la portion de frontière de D intérieure à D'. La différence entre les deux intégrales du second membre de (6) peut s'écrire :

$$\int_{D_2}(f+\delta f)\mathrm{d}V + \int_{D_3}(f+\delta f)\mathrm{d}V - \int_{D_1} f\,\mathrm{d}V - \int_{D_2} f\,\mathrm{d}V, \tag{7}$$

où $\delta f = (\partial f/\partial t)\,\delta t$ désigne l'accroissement en chaque point de la fonction f.

La différence entre les deux intégrales de (7) étendues à D_2 est clairement $\delta t \int_{D_2} \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V$. On notera que, lorsque $\delta t \to 0$, $D_2 \to D$.

Pour exprimer les intégrales de (7) portant sur les domaines infinitésimaux D_1 et D_3, considérons les éléments de volume hachurés sur la figure 1, valant respectivement $-\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\delta t\,\mathrm{d}S$ et $+\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\delta t\,\mathrm{d}S$. Ces deux intégrales deviennent alors, respectivement, $-\delta t \int_{S_1} f\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$ et $+\delta t \int_{S_3} (f+\delta f)\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$. Dans la seconde on peut négliger l'accroissement δf dont la contribution est négligeable lors du passage à la limite. La différence de ces deux intégrales s'écrit donc $\delta t \oint_S f\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S + O(\delta t^2)$ en désignant par $S = S_1 \cup S_3$ la frontière du domaine D. Finalement, la dérivée particulaire définie en (6) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \oint_S f\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{8}$$

En utilisant le théorème de la divergence, on peut encore ramener la seconde intégrale à une intégrale de volume sur le domaine D et obtenir les variantes suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \int_D \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V = \int_D \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\,\nabla.\mathbf{u}\right]\mathrm{d}V. \tag{9}$$

2. L'équation de continuité

Le principe de conservation de la masse du fluide contenu dans tout domaine D, suivi dans son mouvement, requiert l'invariance de $M(t)=\int_D \rho(\mathbf{x},t)\mathrm{d}V$, c'est-à-dire $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t=0$. Les relations (8) et (9) fournissent trois variantes de cette condition dont nous allons examiner les implications.

Les expressions (9), qui doivent être satisfaites quel que soit le domaine D, conduisent à deux variantes de l'équation locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho(\nabla\cdot\mathbf{u})=0. \tag{10}$$

L'une et l'autre montrent que dans le cas d'un fluide incompressible (ρ indépendant de p) et indilatable (ρ indépendant de T), où $\rho=\mathrm{Cste}$, le champ de vitesse vérifie l'équation $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$. Les champs vectoriels qui vérifient cette condition sont dits conservatifs, car ils ont une propriété importante qui sera établie plus loin. Les écoulements permanents, tels que $\partial/\partial t\equiv 0$, satisfont à une propriété de conservation très voisine puisque, que la masse volumique soit variable ou non, ils vérifient : $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=\mathbf{0}$.

La seconde expression (10) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\nabla\cdot\mathbf{u}. \tag{11}$$

Elle montre que le taux de variation de la masse volumique est exactement opposé à $\nabla\cdot\mathbf{u}$, autrement dit que $\nabla\cdot\mathbf{u}$ n'est autre que le taux de variation du volume lui-même (V), de telle sorte que le produit $M=\rho V$ soit invariant.

L'équation de continuité possède encore une propriété remarquable, à savoir que la dérivée particulaire des intégrales de la forme $\int_D g(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m$, où $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}V$, vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_D g(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m=\int_D \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m. \tag{12}$$

Cette permutabilité des opérateurs de dérivation particulaire et d'intégration n'est justifiée que pour les intégrales de cette forme, dites intégrales de masse. Elle résulte directement des relations (9) et (10).

3. Fluides incompressibles : fonction de courant, ligne de courant, tube de courant

Puisque l'air de la troposphère et l'eau des mers satisfont assez bien à la condition d'incompressibilité, portons notre attention sur le cas de ces fluides, où l'équation de continuité sous forme locale s'écrit $\nabla\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Et limitons-nous aux écoulements plans horizontaux, tels que les composantes (u,v,w) du champ de vitesse dans un repère cartésien $(\mathrm{O}x,\mathrm{O}y,\mathrm{O}z)$ vérifient :

$$\mathbf{u}=\left[u(x,y),v(x,y),w\equiv 0\right]. \tag{13}$$

L'équation de continuité, qui devient

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{14}$$

est satisfaite si les composantes u et v de la vitesse sont les dérivées d'une fonction scalaire $\psi(x,y)$, telles que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{15}$$

Ces relations (14) et (15) montrent que $\mathrm{d}\psi = u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x$ est une différentielle totale exacte, autrement dit que la différence $\psi(M) - \psi(O) = \int_O^M (u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x)$, calculée entre deux points O et M, est indépendante du chemin suivi pour aller de O à M. Elle montre aussi que la fonction $\psi(x,y)$ est invariante sur toute ligne tangente en tout point au vecteur vitesse, que l'on appelle *ligne de courant*, puisque, sur une telle ligne, les variations des coordonnées entre deux points voisins, δx et δy, vérifient $\dfrac{\delta x}{u} = \dfrac{\delta y}{v}$, car $\mathbf{u} \times \delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$ avec $\delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$, ou encore $\delta\psi = 0$. Cette grandeur $\psi(x,y)$, définie à une constante additive près par les relations (15), est appelée *fonction de courant*.

Considérons une portion de surface S. L'ensemble des lignes de courant qui passent par les points appartenant à S constituent un *tube de courant*, le long duquel le débit $Q = \int_{S'} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, flux du vecteur vitesse à travers toute section S ou S', est invariant, comme représenté sur la figure 2.

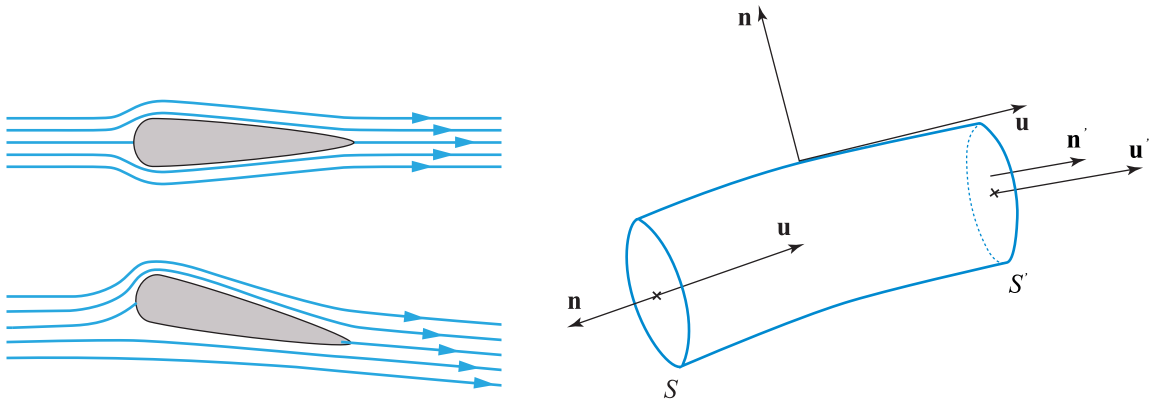

Figure 2. Gauche : réseau de lignes de courant dans l'écoulement plan autour d'une aile d'envergure infinie. Droite : tronçon d'un tube de courant, limité par deux sections S et S' traversées par le même débit, alors qu'aucun débit ne peut traverser la surface latérale, tangente en tout point au vecteur vitesse.

Dans le cas des écoulements plans, un tube de courant est limité par deux lignes de courant sur lesquelles la fonction de courant prend les valeurs ψ_1 et ψ_2. Le débit qui transite dans ce tube de courant d'épaisseur unité n'est autre que la différence $\psi_2 - \psi_1$. La lecture d'un réseau de lignes de courant dont les côtes ψ_n, avec $n = 1, 2, \ldots$, diffèrent d'un pas constant est alors tout à fait significative, puisque l'écartement entre deux lignes voisines est inversement proportionnel à la vitesse (fig. 2 gauche). On notera l'analogie entre un tel réseau de lignes de courant et un réseau de courbes de niveau sur une carte géographique, dont l'écartement est inversement proportionnel à la pente locale du terrain.