B CONSTRUCTIONS DE DIFFÉOMORPHISMES

Cette section commence par le théorème de Hadamard–Lévy. C'est apparemment un simple résultat de calcul différentiel, mais sa preuve utilise de façon décisive la notion de revêtement vue au chapitre 2 du livre.
Les constructions qui suivent utilisent principalement les techniques de fonctions plateau du chapitre 3. Le résultat final, qui est un résultat assez fort de “transitivité par rapport aux cartes” du groupe des difféomorphismes, permet de discuter l'unicité de la somme connexe (exercice 28 du chapitre 2).

B.1 Théorèmes de Hadamard-Lévy et d'Ehresmann.

Proposition B.1. *Si la variété but est connexe, tout difféomorphisme local propre entre variétés est un revêtement.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ un tel difféomorphisme local. On sait déjà que $f(X)$ est ouvert ; il est aussi fermé d'après ce qui précède, donc f est surjective. De plus, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est une sous–variété compacte de codimension 0, donc un ensemble fini. On conclut avec les arguments de la preuve du théorème 2.14 du livre. □

Une conséquence importante est le résultat suivant :

Théorème B.2 (Hadamard–Lévy)**.** *Tout difféomorphisme local propre de* $\mathbf{R}^n$ *dans lui–même est un difféomorphisme.*

Démonstration. Cela vient de la simple connexité de $\mathbf{R}^n$ (voir le théorème 2.44 du livre). Notons que ce résultat est valable dans le cas C^1 comme dans le cas lisse. □

La proposition B.1 admet la généralisation suivante, due à Charles Ehresmann.

Théorème B.3. *Soit* $p : M \to B$ *une submersion propre. On suppose* B *connexe. Alors* p *est une fibration.*

Démonstration. D'après le théorème 2.26 du livre, $p(M)$ est un ouvert de B. Nous avons vu dans la section A.2 (voir prérequis du Web, section “Applications propres”) que c'est un fermé donc p est surjective.
Soit $p \in B$. Alors $F = p^{-1}(b_0)$ est une sous–variété compacte de B, et il existe un ouvert U contenant b, d'adhérence compacte, tel que $p^{-1}(U)$ soit un ouvert d'adhérence compacte contenant $p^{-1}(b_0)$. De plus $U = p\big(p^{-1}(U)\big)$. On peut supposer que U est un ouvert de carte, pour une carte $\psi : U \to \mathbf{R}^n$ telle que $\psi(b_0) = 0$.
Il existe un sous–fibré de $\mathcal{H}$ de TM transverse aux sous–variétés $p^{-1}(b)$. Pour le voir, on peut prendre une métrique riemannienne sur M et prendre

$$\mathcal{H}_m = \big(T_m p^{-1}\big(p(m)\big)\big)^{\perp}.$$

On peut alors trouver des champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_n$ sur $p^{-1}(U)$ tels que $T_m p \cdot X_m = (\partial_i)_p(m)$ pour tout $m \in p^{-1}(U)$, où les champs ∂_i sont les champs définis par la carte.
On procède alors comme suit. On se donne un sous–ouvert V contenant b_0 tel que $\overline{V} \subset U$ et une fonction plateau f à support dans $p^{-1}(U)$ et valant 1 sur $p^{-1}(V)$. Pour chaque $b \in V$, de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la carte, on introduit le champ

$$X(b) = f(\sum_{i=1}^{n} x^i X_i)$$

Alors l'application

$$(b, y) \mapsto \varphi_1^{X(b)}(y)$$

de $V \times p^{-1}(b_0)$ dans $p^{-1}(V)$ donne la trivialisation cherchée.

$\square$

B.2 Difféomorphismes de l'espace euclidien

Le théorème de Hadamard–Lévy est un outil très efficace. Dans tout ce qui suit, $\mathbf{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne naturelle.

Théorème B.4. *On peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que, quels que soient $a \in \mathbf{R}^n$ et $L \in Gl(n, \mathbf{R})$ vérifiant respectivement $\|a\| < \epsilon$ et $\|L - I\| < \epsilon$, il existe un difféomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ tel que*

1. *$f(x) = Lx + a$ si $\|x\| < 1$;*
2. *$f(x) = x$ si $\|x\| > 2$.*

Autrement dit, la restriction à la boule unité d'un isomorphisme affine assez proche de l'identité se prolonge en un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ égal à l'identité hors de la boule de rayon 2.

Démonstration. Soit g une fonction plateau d'une variable, valant 1 pour $|t| < 1$ et 0 pour $|t| > 2$. Alors

$$f(x) = x + g(\|x\|^2)(Lx + a - x)$$

convient. Comme c'est évidemment une application propre, il suffit de vérifier que sa différentielle est partout inversible. C'est clair si $\|x\| < 1$ ou $\|x\| > 2$. Pour $1 \leq \|x\| << 2$ on écrit

$$T_x f \cdot h = h + g(\|x\|^2)(Lh - h) + 2\langle x, h\rangle g'(\|x\|^2)(Lx + a - x)$$

Si A est un majorant de $|g'$, on voit que

$$\|T_x f - I\| < (1 + 4A)\|L - I\| + 4A\|a\|.$$

On conclut en appliquant le théorème de Hadamard-Lévy (voir théorème B.2.)
$\square$

Remarques
a) En tout état de cause, L doit conserver l'orientation.
b) Les mêmes arguments montrent que, pour $t \in [0, 1]$,

$$F(t, x) = x + tg(\|x\|^2)(Lx + a - x)$$

est un difféomorphisme, c'est–à–dire que f est isotope à l'identité à travers des difféomorphismes égaux à l'identité en dehors de la boule de rayon 2.

Théorème B.5. *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et $f_0 : U \mapsto \mathbf{R}^n$ une application tangente à l'identité en 0. Il existe un $\epsilon > 0$ et un difféomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ tels que*
a) $f(x) = f_0(x)$ si $\|x\| < \epsilon$;
b) $f(x) = x$ si $\|x\| > \epsilon$.

Démonstration. On procède comme plus haut, en prenant cette fois

$$f(x) = x + g(\frac{\|x\|^2}{\epsilon^2})\big(f_0(x) - x\big).$$

$\square$

Remarque. Si M est une variété, U un ouvert de M et $f_0 : U \to M$ une application lisse tangente à l'identité en $a \in U$, il existe un ouvert V tel que $a \in V \subset U$ et un diffómorphisme f de M, qui coïncide avec f_0 sur V et avec l'identit hors de U : il suffit de "localiser" le résultat précédent.

B.3 Généralisation aux variétés

Nous avons vu (exercice 15 du chapitre 3 du livre) que le groupe des difféomorphismes d'une variété connexe opère transitivement. On peut dire beaucoup mieux, en introduisant le fibré des repères $\mathcal{R}_M$, décrit dans la section C (voir complément du Web du chapitre 3, "quelques fibrés remarquables"). On montre que $\mathcal{R}_M$ est une variété qui est connexe si M n'est pas orientable, et admet deux composantes connexes si M est orientable.
On a une action naturelle de $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathcal{R}_M$ obtenue en posant

$$f \cdot \big(x, (v_1)_x, \cdots, (v_n)_x\big) = \big(f(x), T_x f \cdot (v_1)_x, \cdots, T_x f \cdot (v_1)_x\big).$$

Théorème B.6. *Soit M une vari'eté connexe. Si M n'est pas orientable, l'action naturelle de $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathcal{R}_M$ est transitive. Si M est orientable, l'action naturelle du groupe des difféomorphismes qui conservent l'orientation est transitive sur chacune des deux composantes connexes de $\mathcal{R}_M$.*

Démonstration. On s'appuie sur le lemme suivant, qui n'est autre que la version "variétés" du théroème B.4.

Lemme B.7. *Soit $r_x \in \mathcal{R}_M$. Il existe des ouverts U_1 et U_2 de $\mathcal{R}_M$, avec $r_x \in U_1 \subset U_2$ tels que pour tout repère $r'_y \in U_1$, il existe un difféomorphisme f qui envoie r_x en r'_y et qui est égal à l'identité en dehors de la projection de U_2 sur M.*

D'après ce lemme, les classes d'équivalence de la relation

$$r_x \simeq r'_y \Longleftrightarrow \text{il existe } f \in \mathrm{Diff}(M) \text{ tel que } f \cdot r_x = r'_y$$

sont ouvertes ; la même propriété est vraie dans le cas orientable avec les difféomorphismes qui conservent l'orientation. On peut donc appliquer le théorème C.1 (voir complément Web du chapitre 3, "quelques fibrés remarquables"). □

Remarque. Si M est orientable et admet un difféomorphisme qui renverse l'orientation, $\mathrm{Diff}(M)$ agit transitivement sur $\mathcal{R}_M$; mais si tout difféomorphisme de M conserve l'orientation (c'est le cas de $P^{2n}\mathbf{C}$), $\mathrm{Diff}(M)$ n'agit pas transitivement.
On peut améliorer considérablement le théorème B.6 ci-dessus.

Théorème B.8. *Soit M une variété connexe, f et g deux difféomorphismes de la boule $B(0, 1+\alpha)$ dans M. Si M est orientable, on suppose de plus que $g \circ f^{-1} : f\big(B(0,1+\alpha)\big) \to g\big(B(0,1+\alpha)\big)$ préserve l'orientation. Alors il existe un difféomorphisme Φ de M tel que $\Phi \circ g$ et f coïncident sur $B(0,1)$.*

Démonstration. D'après le théorème B.6, on peut se ramener au cas où $f(0) = g(0)$ et $T_0 f = T_0 g$. Alors, d'après la remarque qui suit le théorème B.5, on peut trouver un $\epsilon > 0$ et un difféomorphisme H tels que $H \circ g = f$ sur $B(0,\epsilon)$. Pour passer à la boule de rayon 1, on utilise un argument de conjugaison.
Avec les techniques du chapitre 3, on voit qu'il existe un difféomorphisme ϕ de la boule $B(0,1+\alpha)$ sur elle-même tel que $\phi\big(B(0,1)\big) = B(0,\epsilon)$, et que $\phi(x) = w$ pour $\|x\| > 1 + \frac{\alpha}{2}$. Dans ces conditions, il existe aussi des difféomorphismes F et G de M tels que $F \circ f = f \circ \phi$ et $G \circ g = g \circ \phi$ sur $B(0,1)$, avec $F(x) = x$ pour $x \notin f\big(B(0, 1+\frac{\alpha}{2})\big)$ (resp. $G(x) = x$ pour $x \notin g\big(B(0,1+\frac{\alpha}{2})\big)$). Finalement, $\Phi = G^{-1} \circ H \circ G_1$ convient.

□

Application à la somme connexe. Soient M_1 et M_2 deux variétés. On suppose que chacune d'elles est non orientable ou possède un difféomorphisme qui renverse l'orientation. Alors la somme connexe $M_1 \sharp M_2$ (voir l'exercice 28 du chapitre 2 du livre) ne dépend pas du choix des cartes.