C QUELQUES FIBRÉS REMARQUABLES

Les constructions de cette section sont dans le prolongement de celles du chapitre 3. Le fibré des repères a joué un rôle dans la sous-section B.3 (voir complément Web du chapitre 3, “constructions de difféomorphismes”). C’est un exemple de fibré principal.

C.1 Le fibré des repères

Il s’agit de l’ensemble des bases de tous les espaces tangents à une variété M . Il est commode de voir une telle base comme un isomorphisme linéaire $p : \mathbf{R}^n \mapsto T_x M$, les vecteurs de la base étant par convention les images par p des vecteurs de la base naturelle de $\mathbf{R}^n$.

On le notera $\mathcal{R}_M$ ou simplement $\mathcal{R}$ s’il n’y pas d’ambiguïté. Pour le munir d’une structure de variété, on imite la construction de la sous-section 3.5.1 du livre. Avec la convention que nous venons de voir, pour chaque carte (U, ϕ) de M , l’application

$$\Phi : (x, (v_1, \dots, v_n)) \rightarrow (\varphi(x), (T_x \varphi \cdot (v_1, \dots, T_x \varphi \cdot v_n)))$$

est une bijection de $\mathcal{R}_U$ sur $U \times Gl(n, \mathbf{R})$. A partir de là, on voit exactement comme dans le livre qu’avec les cartes $(\mathcal{R}_U, \Phi)$ l’ensemble des repères devient une variété lisse, et même un fibré sur M dont la fibre type est difféomorphe à $Gl(n, \mathbf{R})$.

Théorème C.1. *Le fibré des repères d’une variété connexe M est connexe si la variété n’est pas orientable, et a deux composantes connexes si elle est orientable.*

Démonstration. Ce résultat ressemble beaucoup au théorème 6.8 du livre, auquel nous allons d’ailleurs nous ramener. Notons d’abord que la connexité du revêtement des orientations équivaut à celle de $\bigwedge^n T^*M \setminus M$, ou encore de $\bigwedge^n TM \setminus M$. On envoie alors $\mathcal{R}_M$ dans $\bigwedge^n TM \setminus M$ au moyen de l’application

$$r : ((v_1)_x, \dots, (v_n)_x) \rightarrow (v_1)_x \wedge (v_2)_x \cdots \wedge (v_n)_x.$$

Cette application est surjective, et en utilisant les cartes Φ , on voit que c’est une fibration de fibre type $Sl(n, \mathbf{R})$, qui est connexe. Si M n’est pas orientable, $\bigwedge^n TM \setminus M$ est connexe, et $\mathcal{R}_M$ l’est aussi d’après le théorème A.6 (voir prérequis du Web, section “connexité”). Si M est orientable, $\bigwedge^n TM \setminus M$ a deux composantes connexes, correspondant aux deux orientations opposées. Les éléments de $\mathcal{R}_M$ qui s’envoient sur l’une d’entre elles correspondent aux repères compatibles avec l’une de ces orientations. Ils forment une partie connexe de $\mathcal{R}_M$ d’après le même théorème, et donnent une décomposition de $\mathcal{R}_M$ en deux composantes connexes. $\square$

C.2 Fibrés principaux

Un repère peut aussi se définir comme un isomorphisme linéaire $p : \mathbf{R}^n \rightarrow T_x M$: ce sera alors l’image par p de la base naturelle de $\mathbf{R}^n$. Si $g \in Gl(n, \mathbf{R})$, $p \circ g$

donnera un autre repère. On obtient ainsi une action à *droite* de $Gl(n, \mathbf{R})$ sur $\mathcal{R}_M$ (avec la carte Φ vue plus haut, il est immédiat que cette action est lisse) qui est *simplement transitive* sur les fibres. Cette situation est suffisamment importante pour mériter une définition.

Définition C.2. *Soit G un groupe de Lie. Une G -fibration principale est une fibration $p : P \rightarrow M$, où l'espace total est muni d'une action simplement transitive sur les fibres.*

Deux exemples sont à avoir en tête pour maîtriser cette notion : le fibré des repères d'une variété M est un $Gl(n, \mathbf{R})$ -fibré principal, le fibré de Hopf $p : S^{2n+1} \rightarrow P^n \mathbf{C}$ est un S^1 -fibré principal.

Si la variété M est connexe et orientable, le choix d'une orientation équivaut à celui d'une composante connexe de $\mathcal{R}_M$ (voir le théorème C.1), qui devient ainsi un $Gl^+(n, \mathbf{R})$ fibré principal : c'est le fibré des repères *directs*.

Si M est munie d'une métrique riemannienne g , l'ensemble des repères g -orthonormés est un $O(n)$ -fibré principal.

C.3 Second fibré tangent

sera développé ultérieurement