

D ISOMORPHISMES DE GROUPES DE LIE EN PETITES DIMENSIONS

La classification des groupes de Lie simples (voir un bref énoncé à la fin du chapitre 4 du livre), qui est l'un des aboutissements de la théorie de Lie, ne fait pas partie des sujets que nous avons abordés ici. Elle fait apparaître en basse dimension des isomorphismes remarquables. Il se trouve que la plupart d'entre eux peuvent se justifier directement, avec des techniques de calcul différentiel et d'algèbre extérieure. C'est l'objet de cette section. Certains de ces isomorphismes ont été vus dans le livre (voir les exercices 5 et 9 du chapitre 4 et l'exercice 3 du chapitre 5).

D.1 Introduction

Une première série d'isomorphismes vient du fait, convenablement exploité, que sur l'espace vectoriel des matrices $(2, 2)$, le déterminant est une forme quadratique.

Une seconde série vient du fait, un peu plus élaboré, que la donnée d'une forme volume ω sur un espace vectoriel V de dimension 4 détermine une forme quadratique sur $\bigwedge^2 V$.

Dans ce qui suit, nous utilisons librement la notion de groupe de Lie complexe (voir au besoin la page 176 du livre). L'algèbre de Lie d'un tel groupe est une algèbre de Lie sur $\mathbf{C}$. Une notion importante, sous-jacente dans tout ce qui suit, même si elle n'est pas utilisée explicitement, est celle de forme réelle¹ d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{G}$. On entend par là une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{h}$ dont $\mathfrak{G}$ est la complexifiée. Ainsi, $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ est une forme réelle de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$, mais il y en a beaucoup d'autres, par exemple $\mathfrak{u}(n)$. En effet, si A est une matrice antihermitienne, iA est hermitienne, et toute matrice complexe est somme d'une matrice hermitienne et d'une matrice antihermitienne.

Il résulte de ce fait remarquable qu'un même isomorphisme de groupes de Lie complexes peut donner plusieurs isomorphismes de groupes réels.

D.2 Deux fois deux égale quatre : les conséquences en théorie des groupes

Nous aurons recours de façon répétée à l'argument suivant, déjà utilisé dans les exercices cités dans l'introduction.

Lemme D.1. *Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes de Lie. On suppose que les deux groupes ont même dimension, que G est connexe et que le noyau de f est discret. Alors $f(G)$ est égal à la composante neutre G'_0 de G' , et f donne par passage au quotient un isomorphisme $G/\text{Ker } f \simeq G'_0$.*

1. Il y a ici un lien avec L'Encyclopaedia of Mathematics, <http://eom.springer.de/> (Edited by Michiel Hazewinkel 2002 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York), qui est un outil très commode.

Démonstration. D'après le lemme 4.22 du livre, $T_e f$ est injective et donc surjective en raison de l'hypothèse de dimension. Ainsi, f est partout de rang maximum et $f(G)$ est un sous-groupe ouvert et connexe. C'est donc la composante neutre de G' d'après le théorème 4.27 et la proposition 4.30 du livre. $\square$

Revenons à la première remarque de l'introduction. Si V est un espace vectoriel de dimension 2 (sur un corps K qui sera pour nous $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, mais ces considérations restent valables dans beaucoup d'autres cas, et notamment pour les corps finis), l'application $u \mapsto \det(u)$ de $\text{End}(V)$ est une *forme quadratique* sur $\text{End}(V)$: pour le voir il suffit par exemple d'exprimer le déterminant dans une base. Cette expression montre aussi que la forme quadratique en question est *non dégénérée*.

Théorème D.2. *On a les isomorphismes*

$$\begin{aligned} Sl(2, \mathbf{C}) \times Sl(2, \mathbf{C}) / \{I, \sigma\} &\simeq SO(4, \mathbf{C}) \\ Sl(2, \mathbf{R}) \times Sl(2, \mathbf{R}) / \{I, \sigma\} &\simeq SO(2, 2) \\ SU(2) \times SU(2) / \{I, \sigma\} &\simeq SO(4) \end{aligned}$$

où $\sigma = (Id, -Id)$.

Démonstration. Si V est un espace vectoriel, on définit un morphisme h de $Gl(V) \times Gl(V)$ dans $Gl(\text{End}(V))$ par la formule

$$h(u, v).x = uxv^{-1}.$$

Si $uxv^{-1} = x$ pour tout endomorphisme x , en faisant $x = Id$ on voit que $u = v$. On a alors $ux = xv$ pour tout x , donc $u = v = \lambda Id$.

Maintenant, si V est de dimension 2 et si $(u, v) \in Sl(V) \times Sl(V)$, $h(u, v)$ conserve la forme quadratique déterminant. Dans le cas complexe, toutes les formes quadratiques de rang maximum sont équivalentes ; dans le cas réel, le déterminant est de type $(2, 2)$. Dans les deux premiers cas, on conclut en appliquant le lemme D.1. Dans le troisième cas, on remarque que sur le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 formé des matrices

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } u, v \in \mathbf{C},$$

le déterminant donne une forme quadratique définie positive. Par ailleurs, cet espace est égal à $\mathbf{R} \cdot SU(2)$, ce qui montre que h définit par restriction un morphisme de $SU(2) \times SU(2)$ dans $O(4)$. On applique alors à nouveau le lemme D.1. $\square$

L'utilisation de la conjugaison donne une autre série d'isomorphismes.

Théorème D.3. *L'application ρ donne par passage au quotient les isomorphismes*

$$\begin{aligned} Sl(2, \mathbf{C}) / \{\pm Id\} &\simeq SO(3, \mathbf{C}) \\ Sl(2, \mathbf{R}) / \{\pm Id\} &\simeq S_0(2, 1) \\ SU(2) / \{\pm Id\} &\simeq SO(3) \end{aligned}$$

Démonstration. Les groupes $Sl(2, \mathbf{C})$, $Sl(2, \mathbf{R})$ et $SU(2)$ opèrent respectivement par conjugaison sur

1. L'espace vectoriel des matrices $(2, 2)$ complexes de trace nulle.
2. L'espace vectoriel des matrices $(2, 2)$ réelles de trace nulle.
3. L'espace vectoriel (réel!) des matrices $(2, 2)$ anti-hermitiennes de trace nulle.

(Dans chacun de ces cas, il s'agit de la représentation adjointe du groupe concerné). Cette conjugaison laisse le déterminant invariant. Ce déterminant est une forme quadratique complexe de rang maximum dans le premier cas, réelle de type $(2, 1)$ dans le deuxième. Dans le troisième cas, on rappelle (voir l'exercice 4 du chapitre 2 du livre) que l'algèbre de Lie de $SU(2)$ est formée des matrices anti-hermitiennes de trace nulle. Une telle matrice s'écrit

$$\begin{pmatrix} ix & y + iz \\ y - iz & -ix \end{pmatrix}$$

où x, y, z sont réels et son déterminant est $x^2 + y^2 + z^2$. On conclut en appliquant le lemme D.1. $\square$

Remarque. Dans le cas complexe, il faut montrer que la composante neutre de $O(n, \mathbf{C})$ est bien $SO(n, \mathbf{C})$. Nous laissons cette vérification au lecteur. Dans le cas réel, $O(2, 1)$ et $SO(2, 1)$ ont évidemment la même composante neutre. Donnons encore deux exemples.

Exercice

- a) Soit $U(1, 1)$ le sous-groupe de $Gl(2, \mathbf{C})$ formé des applications linéaires qui préservent la forme hermitienne $|z_1|^2 - |z_2|^2$. Montrer que c'est un groupe de Lie et déterminer son algèbre de Lie.
- b) Soit $SU(1, 1) = U(1, 1) \cap Sl(2, \mathbf{C})$. Montrer, en utilisant sa représentation adjointe, que $SU(1, 1)/\{\pm Id\} \simeq S_0(2, 1)$.
- c) Vérifier que l'espace $\mathcal{H}_2$ des matrices hermitiennes $(2, 2)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4, sur lequel le déterminant définit une forme quadratique de type $(1, 3)$.
- d) Pour $A \in Sl(2, \mathbf{C})$ et $M \in \mathcal{H}_2$, on pose

$$\sigma(A) \cdot M = {}^t A M \bar{A}$$

Montrer que σ donne par passage au quotient un isomorphisme entre $Sl(2, \mathbf{C})/\{\pm I\}$ et $SO_0(3, 1)$.

****Remarque, sous forme de digression.** Plusieurs de ces isomorphismes ont une interprétation en géométrie non euclidienne, plus précisément en géométrie hyperbolique (appelée aussi, en dimension 2, géométrie de Lobatchevski). On peut démontrer (voir par exemple [Gallot–Hulin–Lafontaine], 3.F) qu'il existe, à isométrie près, deux variétés riemanniennes non compactes de dimension 2 doublement homogènes (c'est-à-dire pour lesquelles le groupe des isométries est transitif sur les couples de points (a, b) , (a', b') tels que $d(a, b) =$

$d(a', b')$. La première est le plan euclidien, la seconde le plan hyperbolique, très brièvement évoqué au chapitre 8 du livre (voir p. 314 et 323). Pour en savoir plus sur ce merveilleux objet, voir [Stillwell]²

Le plan hyperbolique admet plusieurs réalisations (il est d'usage de parler de “modèles”). Ces modèles sont isométriques (voir par exemple [Gallot–Hulin–Lafontaine], 2.10 et 2.11 pour des isométries explicites), ce qui montre que les groupes d'isométrie correspondants sont isomorphes.

1. Modèle hyperboloïde. Dans $\mathbf{R}^3$ muni de la forme bilinéaire

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2,$$

c'est la sous-variété

$$H = \{x \in \mathbf{R}^3, \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$$

munie de la métrique riemannienne obtenue en restreignant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à chaque espace tangent. Le groupe des isométries directes est $SO_0(2, 1)$. Noter l'analogie avec la sphère.

2. Modèle du demi-plan de Poincaré $P = \{z \in \mathbf{C}, \text{Im}(z) > 0\}$, muni de la métrique

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Le groupe des isométries directes est formé des homographies

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{avec } a, b, c, d \text{ réels, } ad - bc > 0.$$

Il est isomorphe à $Sl(2, \mathbf{R})/\{\pm Id\}$.

3. Modèle du disque de Poincaré $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$, muni de la métrique

$$4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - |z|^2)^2}$$

Le groupe des isométries directes est formé des homographies

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad \text{avec } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Il est isomorphe à $SU(1, 1)/\{\pm Id\}$.

On peut aussi expliquer géométriquement l'isomorphisme de la question d) de l'exercice précédent. Le groupe des transformations biholomorphes de $P^1\mathbf{C}$ s'identifie à $Sl(2, \mathbf{C})/\{\pm I\}$ vu comme le groupe des homographies de la droite projective complexe (voir encore [Stillwell]), et $SO_0(3, 1)$ s'identifie, d'après l'exercice 16 du chapitre 2 du livre, au groupe des transformations conformes³ de S^2 qui conservent l'orientation. Ces deux notions sont ici équivalentes, par exemple d'après la sous-section 1.2.2 du livre**.

2. J. Stillwell, *Geometry of surfaces*, Springer Verlag, 1992, Collection Universitext, chapitre

4

3. C'est-à-dire dont la différentielle est une similitude.

D.3 ... et les conséquences de deux fois trois égale six

Commençons par mettre en forme la seconde remarque de l'introduction.

Lemme D.4. *Soit V un espace vectoriel de dimension 4 et ω un élément non nul de $\bigwedge^4 V$. On définit une forme bilinéaire symétrique ϕ sur $\bigwedge^2 V$ par la formule*

$$\alpha \wedge \beta = \phi(\alpha, \beta)\omega \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \bigwedge^2 V$$

Cette forme est non dégénérée et de type (3, 3) dans le cas réel.

Démonstration. Rappelons d'abord que le produit extérieur en degrés pairs est commutatif. Le 4-vecteur $\alpha \wedge \beta$ est colinéaire à ω , ce qui définit ϕ . Soit maintenant α un élément non nul de $\bigwedge^2 V$. Ou bien $\alpha \wedge \alpha \neq 0$ et alors $\phi(\alpha, \alpha) \neq 0$. Ou bien $\alpha \wedge \alpha = 0$ et alors il existe des vecteurs indépendants x et y tels que $\alpha = x \wedge y$. En complétant $\{x, y\}$ en une base $\{x, y, z, t\}$ de V , on obtient un élément $\beta = z \wedge t$ tel que $\phi(\alpha, \beta) \neq 0$. Ainsi, ϕ est non dégénérée. Elle est de type (3, 3) dans le cas réel en raison des calculs explicites de la page 185 du livre.

□

Corollaire D.5. *On a les isomorphismes*

$$\begin{aligned} Sl(4, \mathbf{C})/\{\pm Id\} &\simeq SO(6, \mathbf{C}) & Sl(4, \mathbf{R})/\{\pm Id\} &\simeq SO_0(3, 3) \\ Sp(2, \mathbf{C})/\{\pm Id\} &\simeq SO(5, \mathbf{C}) & Sp(2, \mathbf{R})/\{\pm Id\} &\simeq SO_0(3, 2) \end{aligned}$$

Démonstration. Notons d'abord que la formule

$$g^{\wedge 2}(x \wedge y) = gx \wedge gy$$

où $g \in Gl(V)$ définit un morphisme de groupe et même un morphisme de groupe de Lie, de $Gl(V)$ dans $Gl(\bigwedge^2 V)$, dont le noyau est $\{\pm Id\}$. La première assertion est du “non-sens abstrait”. La seconde vient du fait que si l'on représente g et $g^{\wedge 2}$ par des matrices, les coefficients de la matrice de $g^{\wedge 2}$ sont des polynômes par rapport à ceux de la matrice de g .

Soit enfin $g \in Gl(V)$ tel que $gx \wedge gy = x \wedge y$ quels que soient x et y dans V . Alors $gx \wedge x \wedge y = 0$ et gx est combinaison linéaire de x et y . Fixant x et faisant varier y , on voit que gx est colinéaire à x , puis que g est une homothétie.

Supposons maintenant V de dimension 4. Si g préserve un élément non nul de V , alors $g^{\wedge 2}$ préserve la forme ϕ . Dans le cas complexe, toutes les formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes, et $g \mapsto g^{\wedge 2}$ donne un morphisme de $Sl(4, \mathbf{C})$ dans $O(6, \mathbf{C})$; dans le cas réel, on a un morphisme de $Sl(4, \mathbf{R})$ dans $O(3, 3)$.

Ce morphisme a un noyau discret, donc l'application linéaire tangente à l'élément neutre est injective. Mais les groupes de départ et d'arrivée ont même dimension, puisque $4^2 - 1 = \frac{6.5}{2}$. Les isomorphismes de la première ligne s'en déduisent grâce au lemme D.1.

Les isomorphismes de la deuxième ligne font intervenir le *groupe symplectique* (voir l'exercice 2 du chapitre 5 du livre), complexe puis réel. Ce dernier est défini

habituellement comme le groupe des applications linéaires qui conservent une forme bilinéaire alternée de rang maximum. Il revient au même de se donner un 2-vecteur alterné η de rang maximum et de dire que g est symplectique si et seulement si $h(\eta, \eta) \neq 0$. Mais alors, si g est symplectique, $g^{\wedge 2}$ laisse stable l'orthogonal pour ϕ de $K\eta$ (avec $K = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$ suivant les cas) et comme $h(\eta, \eta) \neq 0$, la restriction de h à cet orthogonal est non dégénérée et de type $(2, 3)$ dans le cas réel. On obtient donc des morphismes de $Sp(2, \mathbf{C})$ dans $0(5, \mathbf{C})$ et de $Sp(2, \mathbf{R})$ dans $0(5, \mathbf{C})$. La conclusion pour les isomorphismes de la deuxième ligne s'ensuit, toujours grâce au lemme D.1, sachant que

$$\dim_K (Sp(n, K)) = 2n^2 + n.$$

□

On obtient d'autres isomorphismes lorsqu'on munit $\mathbf{C}^4$ d'une forme (pseudo)-hermitienne. La donnée d'une telle forme h permet de définir une forme hermitienne $h^{\wedge 2}$ sur $\bigwedge^2 \mathbf{C}^4$ en posant

$$h^{\wedge 2}(x \wedge y, z \wedge t) = h(x, z)h(y, t) - h(x, t)h(y, z)$$

Cette forme est définie positive quand h l'est. Posons $E = \bigwedge^2 \mathbf{C}^4$ pour alléger les notations. Rappelons que ϕ définit un isomorphisme de $\phi^\sharp$ de E sur E^* , obtenu en posant

$$\phi^\sharp(X) \cdot Y = \phi(X, Y).$$

On obtient de même un *anti-isomorphisme* en posant

$$(h^{\wedge 2})^\sharp(X) \cdot Y = h^{\wedge 2}(X, Y),$$

et donc un anti-isomorphisme $(\phi^\sharp)^{-1} \circ (h^{\wedge 2})^\sharp$ de E .

Théorème D.6. *On a l'isomorphisme*

$$SU(4)/\{\pm Id\} \simeq SO(6)$$

Démonstration. Munissons $\bigwedge^2 \mathbf{C}^4$ d'une forme hermitienne h définie positive et soit (a, b, c, d) une base orthonormée pour h . Alors la base $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ de E donnée par

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a \wedge b + c \wedge d) & v_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(a \wedge b - c \wedge d) \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a \wedge c - b \wedge d) & v_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(a \wedge c + b \wedge d) \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a \wedge d + b \wedge c) & v_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(a \wedge d - b \wedge c) \end{aligned}$$

est orthonormée pour $h^{\wedge 2}$ et pour ϕ , si ϕ est définie à partir de $\omega = a \wedge b \wedge c \wedge d$ (comparer aux calculs du livre sous-section 5.2.3, page 185). D'après les définitions de $\phi^\sharp$ et $(h^{\wedge 2})^\sharp$,

– si g préserve h , $g^{\wedge 2}$ commute avec $(\phi^\sharp)^{-1} \circ (h^{\wedge 2})^\sharp$;

– les vecteurs de l'espace *réel* engendré par $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ sont laissés fixes par $(\phi^\sharp)^{-1} \circ (h^{\wedge 2})^\sharp$

Comme de plus les restrictions de h et ϕ à cet espace donne la même forme quadratique (réelle!) définie positive, $g \mapsto g^{\wedge 2}$ donne un morphisme de $SU(4)$ dans $SO(6)$. On applique encore une fois le lemme D.1. $\square$

Remarques finales.

a) La même méthode s'applique dans le cas d'une forme hermitienne de type $(2, 2)$, et donne l'isomorphisme $SU(2, 2)/\{\pm Id\} \simeq SO_0(4, 2)$.

b) On peut aussi montrer que le sous-groupe de $SU(4)$ qui laisse fixe $(a \wedge b + c \wedge d)$ est isomorphe à $Sp(2)$, d'où l'isomorphisme $Sp(2)/\{\pm Id\} \simeq SO(5)$.

**c) Il y a d'autres isomorphismes dans les mêmes dimensions, un peu plus sophistiqués, qui font intervenir des structures quaternioniennes. Voir [Onischchik–Vinberg] p. 226 pour la description de ces structures, et p. 235 pour une liste complète des isomorphismes en basse dimension. **

d) Les algébristes impénitent(e)s peuvent consulter le paragraphe 3 du chapitre 7 de *The Classical Groups and K-Theory* de A.J. Hahn et O.T. O'Meara (Springer Grundlehren 291), où l'on verra des versions de ces isomorphismes pour un corps de base quelconque, et même un anneau. Celles et ceux qui ne sont que modérément algébristes consulteront avec plaisir *Algèbre Géométrique*, d'Emil Artin (ré-édition Jacques Gabay 1996).